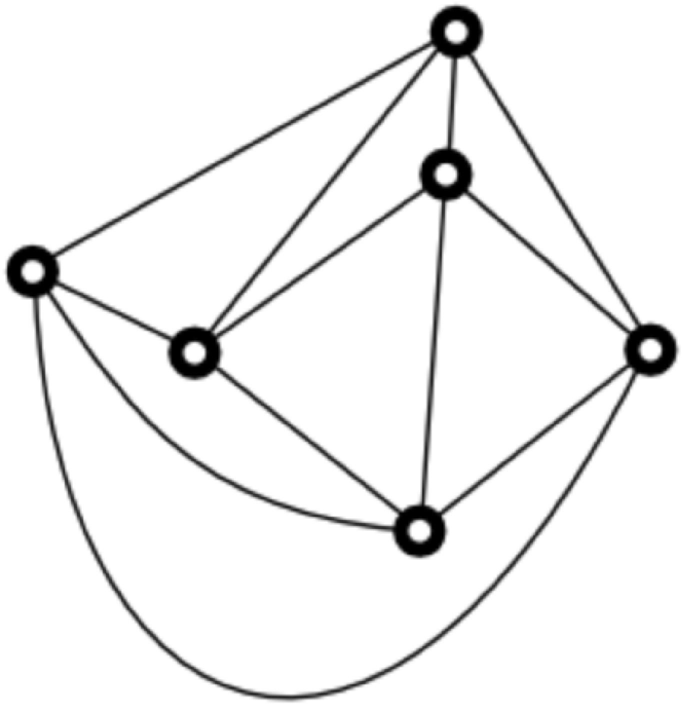
Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений ребер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**.

Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости – тоже грань, называется *внешней гранью*.

Простой граф (конечный граф без кратных ребер и петель) называется **максимально планарным**, если он плоский, но добавление любого ребра (на заданному наборе вершин) разрушило бы это свойство.



Каждая грань в максимально планарном графе имеет три вершины, поэтому максимально планарный граф называется **триангулированным** и имеет ровно три внешних ребра.

Формула Эйлера. Если планарный связный граф имеет v вершин, e – количество ребер, f – количество граней, то они связаны формулой $v-e+f=2$.

Следствие из формулы Эйлера. Планарный граф с числом вершин $v \geq 3$ имеет не более $3v-6$ ребер. Триангулированный граф с v вершинами имеет $3v-6$ ребер.

Доказательство. Каждая грань графа ограничена не менее тремя ребрами, а каждое ребро является границей не более двух граней, тогда $3f \leq 2e$. Отсюда по формуле Эйлера следует:

$$2 = v-e+f \leq v-e+\frac{2}{3}e \Rightarrow e \leq 3v-6.$$

Для максимальнопланарного графа выполняется равенство $3f = 2e$, аналогично из формулы Эйлера получаем $e = 3v-6$ и $f = 2v-4$.

https://scask.ru/q_book_strts.php?id=8

1.4. ПРОСТАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА

Предположим, что исходом каждого испытания может быть не одно из двух событий A или $\bar{A}$, а одно событие из полной группы несовместимых событий $A_1, \ldots, A_m$. Простейший вид вероятностной связи состоит в том, что условная вероятность $p^{(s)}{}_{ij}$ появления какого-то события A_j при $(s+1)$-м испытании зависит только от того, какое событие A_i появилось при s-м испытании, и не зависит от того, какие события появились при более ранних испытаниях. Такая последовательность событий называется *простой цепью Маркова*. Если условная вероятность p_{ij} перехода от события A_i к событию A_j обусловлена только этими событиями, но не зависит от номера испытания, то соответствующая простая цепь Маркова называется *однородной*.

Следующее повышение сложности состоит в учете появления двух или более событий, предшествовавших данному испытанию. Подобным образом можно получить все более сложные цепи Маркова.

Как следует из приведенного определения, для описания простой однородной цепи Маркова необходимо указать условные вероятности появления события A_j после события A_i, $i, j=\overline{1, m}$.

Эти вероятности называются переходными; они могут быть расположены в виде таблицы:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}. \qquad (1.33)$$

Такая таблица называется *матрицей переходных вероятностей* (или стохастической матрицей). Необходимо задать также априорные вероятности $p_k(1)$ осуществления каждого из событий A_k в первом испытании. Матрица $\mathbf{M}$ переходных вероятностей вместе с вектором априорных вероятностей $\mathbf{p}(1) = [p_1(1), \dots, p_m(1)]$ полностью определяют простую однородную цепь Маркова.

Поскольку при каждом данном испытании появление одного из событий, составляющих полную группу, достоверно, то сумма переходных вероятностей в каждой строке матрицы $\mathbf{M}$ равна единице, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (1.34)$$

В соответствии с формулой полной вероятности вероятность появления события A_j во втором испытании

$$p_j(2) = \sum_{i=1}^{m} p_i(1)\, p_{ij}, \quad j = \overline{1, m}$$

или в векторной записи

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{M}\mathbf{p}(1). \qquad (1.35)$$

Общее соотношение между векторами $\mathbf{p}(i)$ и $\mathbf{p}(s)$ имеет вид

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{M}^{s-i}\mathbf{p}(i), \; s \geqslant i. \qquad (1.36)$$

Справедлива теорема, согласно которой для однородной простой цепи Маркова с положительно определенной матрицей $\mathbf{M}$

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{p}(s) = \mathbf{p}, \qquad (1.37)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор предельных вероятностей появления событий, который не зависит от $\mathbf{p}(1)$ и является собственным вектором матрицы $\mathbf{M}$, принадлежащим характеристическому числу, равному единице.

https://habr.com/ru/post/455762/

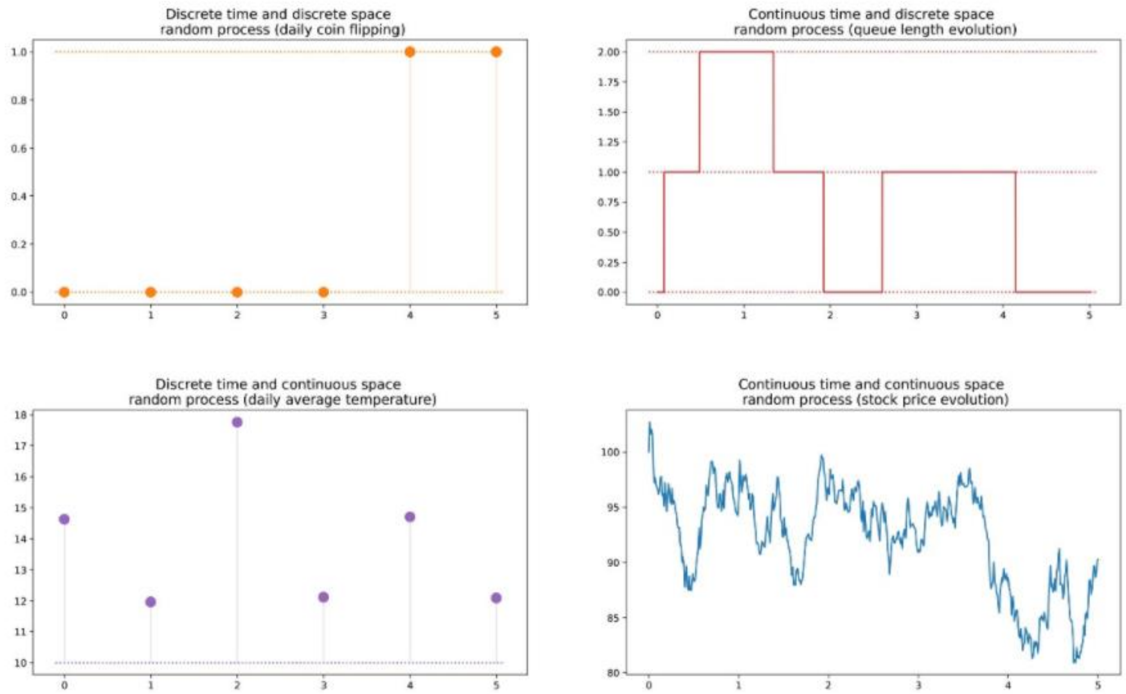
Что такое цепи Маркова?

Случайные переменные и случайные процессы

Прежде чем вводить понятие цепей Маркова, давайте вкратце вспомним базовые, но важные понятия теории вероятностей.

Во-первых, вне языка математики **случайной величиной** X считается величина, которая определяется результатом случайного явления. Его результатом может быть число (или «подобие числа», например, векторы) или что-то иное. Например, мы можем определить случайную величину как результат броска кубика (число) или же как результат бросания монетки (не число, если только мы не обозначим, например, «орёл» как 0, а «решку» как 1). Также упомянем, что пространство возможных результатов случайной величины может быть дискретным или непрерывным: например, нормальная случайная величина непрерывна, а пуассоновская случайная величина дискретна.

Далее мы можем определить **случайный процесс** (также называемый стохастическим) как набор случайных величин, проиндексированных множеством T, которое часто обозначает разные моменты времени (в дальнейшем мы будем считать так). Два самых распространённых случая: T может быть или множеством натуральных чисел (случайный процесс с дискретным временем), или множеством вещественных чисел (случайный процесс с непрерывным временем). Например, если мы будем бросать монетку каждый день, то зададим случайный процесс с дискретным временем, а постоянно меняющаяся стоимость опциона на бирже задаёт случайный процесс с непрерывным временем. Случайные величины в разные моменты времени могут быть независимыми друг от друга (пример с подбрасыванием монетки), или иметь некую зависимость (пример со стоимостью опциона); кроме того, они могут иметь непрерывное или дискретное пространство состояний (пространство возможных результатов в каждый момент времени).

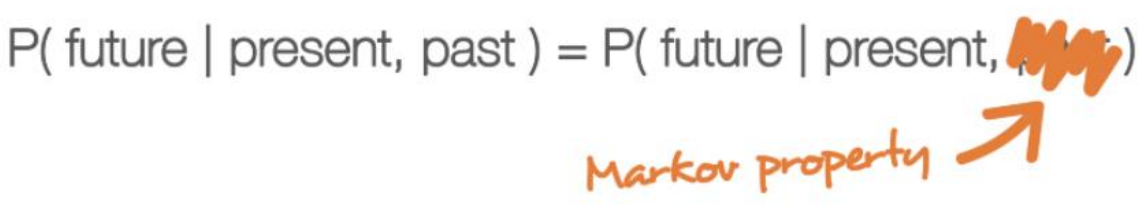


Разные виды случайных процессов (дискретные/непрерывные в пространстве/времени).

Марковское свойство и цепь Маркова

Существуют хорошо известные семейства случайных процессов: гауссовы процессы, пуассоновские процессы, авторегрессивные модели, модели скользящего среднего, цепи Маркова и другие. Каждое из этих отдельных случаев имеет определённые свойства, позволяющие нам лучше исследовать и понимать их.

Одно из свойств, сильно упрощающее исследование случайного процесса — это «марковское свойство». Если объяснять очень неформальным языком, то марковское свойство сообщает нам, что если мы знаем значение, полученное каким-то случайным процессом в заданный момент времени, то не получим никакой дополнительной информации о будущем поведении процесса, собирая другие сведения о его прошлом. Более математическим языком: в любой момент времени условное распределение будущих состояний процесса с заданными текущим и прошлыми состояниями зависит только от текущего состояния, но не от прошлых состояний (**свойство отсутствия памяти**). Случайный процесс с марковским свойством называется **марковским процессом**.



Марковское свойство обозначает, что если мы знаем текущее состояние в заданный момент времени, то нам не нужна никакая дополнительная информация о будущем, собираемая из прошлого.

На основании этого определения мы можем сформулировать определение «однородных цепей Маркова с дискретным временем» (в дальнейшем для простоты мы их будем называть «цепями Маркова»). **Цепь Маркова** — это марковский процесс с дискретным временем и дискретным пространством состояний. Итак, цепь Маркова — это дискретная последовательность состояний, каждое из которых берётся из дискретного пространства состояний (конечного или бесконечного), удовлетворяющее марковскому свойству.

Математически мы можем обозначить цепь Маркова так:

$$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X_0, X_1, X_2, ...)$$

где в каждый момент времени процесс берёт свои значения из дискретного множества E, такого, что

$$X_n \in E \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда марковское свойство подразумевает, что у нас есть

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, X_{n-2} = s_{n-2}, ...) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n)$$

Снова обратите внимание, что эта последняя формула отражает тот факт, что для хронологии (где я нахожусь сейчас и где я был раньше) распределение вероятностей следующего состояния (где я буду дальше) зависит от текущего состояния, но не от прошлых состояний.

Характеризуем динамику случайности цепи Маркова

В предыдущем подразделе мы познакомились с общей структурой, соответствующей любой цепи Маркова. Давайте посмотрим, что нам нужно, чтобы задать конкретный «экземпляр» такого случайного процесса.

Сначала заметим, что полное определение характеристик случайного процесса с дискретным временем, не удовлетворяющего марковскому свойству, может быть сложным занятием: распределение вероятностей в заданный момент времени может зависеть от одного или нескольких моментов в прошлом и/или будущем. Все эти возможные временные зависимости потенциально могут усложнить создание определения процесса.

Однако благодаря марковскому свойству динамику цепи Маркова определить довольно просто. И в самом деле. нам нужно определить только два аспекта: **исходное распределение вероятностей** (то есть распределение вероятностей в момент времени n=0), обозначаемое

$$\mathbb{P}(X_0 = s) = q_0(s) \qquad \forall s \in E$$

и **матрицу переходных вероятностей** (которая даёт нам вероятности того, что состояние в момент времени n+1 является последующим для другого состояния в момент n для любой пары состояний), обозначаемую

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n) = p(s_n, s_{n+1}) \qquad \forall (s_{n+1}, s_n) \in E \times E$$

Если два этих аспекта известны, то полная (вероятностная) динамика процесса чётко определена. И в самом деле, вероятность любого результата процесса тогда можно вычислить циклически.

Пример: допустим, мы хотим знать вероятность того, что первые 3 состояния процесса будут иметь значения (s0, s1, s2). То есть мы хотим вычислить вероятность

$$\mathbb{P}(X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2)$$

Здесь мы применяем формулу полной вероятности, гласящую, что вероятность получения (s0, s1, s2) равна вероятности получения первого s0, умноженного на вероятность получения s1 с учётом того, что ранее мы получили s0, умноженного на вероятность получения s2 с учётом того, что мы получили ранее по порядку s0 и s1. Математически это можно записать как

$$\mathbb{P}(X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2) = \mathbb{P}(X_0 = s_0)\mathbb{P}(X_1 = s_1 | X_0 = s_0)\mathbb{P}(X_2 = s_2 | X_0 = s_0, X_1 = s_1)$$

И затем проявляется упрощение, определяемое марковским допущением. И в самом деле, в случае длинных цепей мы получим для последних состояний сильно условные вероятности. Однако в случае цепей Маркова мы можем упростить это выражение, воспользовавшись тем, что

$$\mathbb{P}(X_2 = s_2 | X_0 = s_0, X_1 = s_1) = \mathbb{P}(X_2 = s_2 | X_1 = s_1)$$

получив таким образом

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2) &= \mathbb{P}(X_0 = s_0)\mathbb{P}(X_1 = s_1 | X_0 = s_0)\mathbb{P}(X_2 = s_2 | X_1 = s_1) \\ &= q_0(s_0)p(s_0, s_1)p(s_1, s_2)\end{aligned}$$

Так как они полностью характеризуют вероятностную динамику процесса, многие сложные события можно вычислить только на основании исходного распределения вероятностей q0 и матрицы переходной вероятности p. Стоит также привести ещё одну базовую связь: выражение распределения вероятностей во время n+1, выраженное относительно распределения вероятностей во время n

$$q_{n+1}(s_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1}) = \sum_{s \in E} \mathbb{P}(X_n = s)\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s) = \sum_{s \in E} q_n(s)p(s, s_{n+1})$$

Цепи Маркова в конечных пространствах состояний

Представление в виде матриц и графов

Здесь мы допустим, что во множестве E есть конечное количество возможных состояний N:

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_N\}$$

Тогда исходное распределение вероятностей можно описать как **вектор-строку** q0 размером N, а переходные вероятности можно описать как матрицу p размером N на N, такую что

$$(q_0)_i = q_0(e_i) = \mathbb{P}(X_0 = e_i)$$
$$p_{i,j} = p(e_i, e_j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i) \qquad \text{(independent of n)}$$

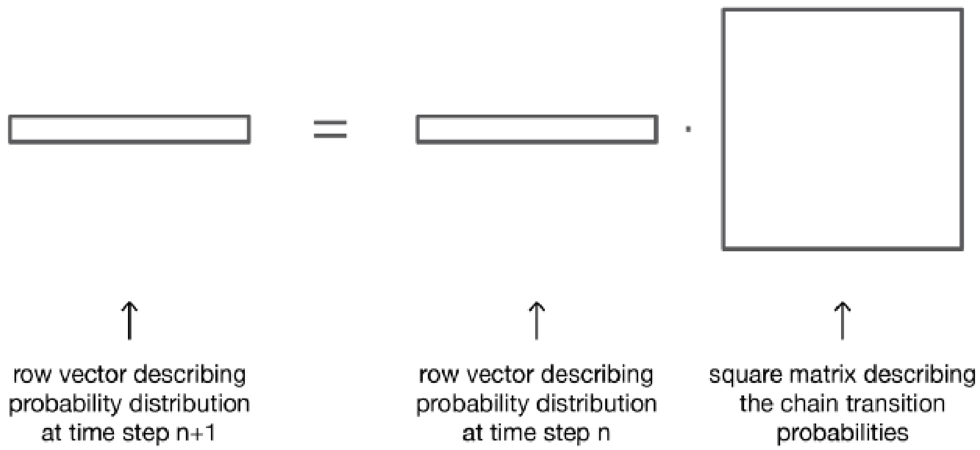
Преимущество такой записи заключается в том, что если мы обозначим распределение вероятностей на шаге n вектором-строкой qn, таким что его компоненты задаются

$$(q_n)_i = q_n(e_i) = \mathbb{P}(X_n = e_i)$$

тогда простые матричные связи при этом сохраняются

$$q_{n+1} = q_n p \qquad q_{n+2} = q_{n+1} p = (q_n p) p = q_n p^2 \qquad \dots \qquad q_{n+m} = q_n p^m$$

(здесь мы не будем рассматривать доказательство, но воспроизвести его очень просто).



Если умножить справа вектор-строку, описывающий распределение вероятностей на заданном этапе времени, на матрицу переходных вероятностей, то мы получим распределение вероятностей на следующем этапе времени.

Итак, как мы видим, переход распределения вероятностей из заданного этапа в последующий определяется просто как умножение справа вектора-строки вероятностей исходного шага на матрицу p. Кроме того, это подразумевает, что у нас есть

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in 1 step}$$
$$(p^2)_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+2} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in 2 steps}$$
$$\dots$$
$$(p^m)_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+m} = e_j | X_n = e_i) \equiv \text{ probability of going from } e_i \text{ to } e_j \text{ in m steps}$$

Динамику случайности цепи Маркова в конечном пространстве состояний можно с лёгкостью представить как нормированный ориентированный граф, такой что каждый узел графа является состоянием, а для каждой пары состояний (ei, ej) существует ребро, идущее от ei к ej, если p(ei,ej)>0. Тогда значение ребра будет той же вероятностью p(ei,ej).

Пример: читатель нашего сайта

Давайте проиллюстрируем всё это простым примером. Рассмотрим повседневное поведение вымышленного посетителя сайта. В каждый день у него есть 3 возможных состояния: читатель не посещает сайт в этот день (N), читатель посещает сайт, но не читает пост целиком (V) и читатель посещает сайт и читает один пост целиком (R). Итак, у нас есть следующее пространство состояний:

$$E = \{N, V, R\}$$

Допустим, в первый день этот читатель имеет вероятность 50% только зайти на сайт и вероятность 50% посетить сайт и прочитать хотя бы одну статью. Вектор, описывающий исходное распределение вероятностей (n=0) тогда выглядит так:

$$q_0 = (0.0, 0.5, 0.5)$$

Также представим, что наблюдаются следующие вероятности:

- когда читатель не посещает один день, то имеет вероятность 25% не посетить его и на следующий день, вероятность 50% только посетить его и 25% — посетить и прочитать статью
- когда читатель посещает сайт один день, но не читает, то имеет вероятность 50% снова посетить его на следующий день и не прочитать статью, и вероятность 50% посетить и прочитать
- когда читатель посещает и читает статью в один день, то имеет вероятность 33% не зайти на следующий день *(надеюсь, этот пост не даст такого эффекта!)*, вероятность 33% только зайти на сайт и 34% — посетить и снова прочитать статью

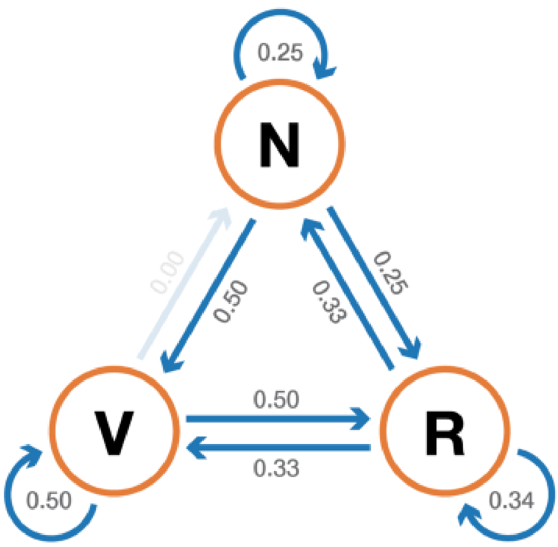
Тогда у нас есть следующая переходная матрица:

$$p = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.33 & 0.33 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Из предыдущего подраздела мы знаем как вычислить для этого читателя вероятность каждого состояния на следующий день (n=1)

$$q_1 = q_0 p = (0.0, 0.5, 0.5) \begin{pmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.33 & 0.33 & 0.34 \end{pmatrix} = (0.165, 0.415, 0.420)$$

Вероятностную динамику этой цепи Маркова можно графически представить так:



Представление в виде графа цепи Маркова, моделирующей поведение нашего придуманного посетителя сайта.

Свойства цепей Маркова

В этом разделе мы расскажем только о некоторых самых базовых свойствах или характеристиках цепей Маркова. Мы не будем вдаваться в математические подробности, а представим краткий обзор интересных моментов, которые необходимо изучить для использования цепей Маркова. Как мы видели, в случае конечного пространства состояний цепь Маркова можно представить в виде графа. В дальнейшем мы будем использовать графическое представление для объяснения некоторых свойств. Однако не стоит забывать, что эти свойства необязательно ограничены случаем конечного пространства состояний.

Разложимость, периодичность, невозвратность и возвратность

В этом подразделе давайте начнём с нескольких классических способов характеризации состояния или целой цепи Маркова.

Во-первых, мы упомянем, что цепь Маркова **неразложима**, если можно достичь любого состояния из любого другого состояния (необязательно, что за один шаг времени). Если пространство состояний конечно и цепь можно представить в виде графа, то мы можем сказать, что граф неразложимой цепи Маркова сильно связный (теория графов).

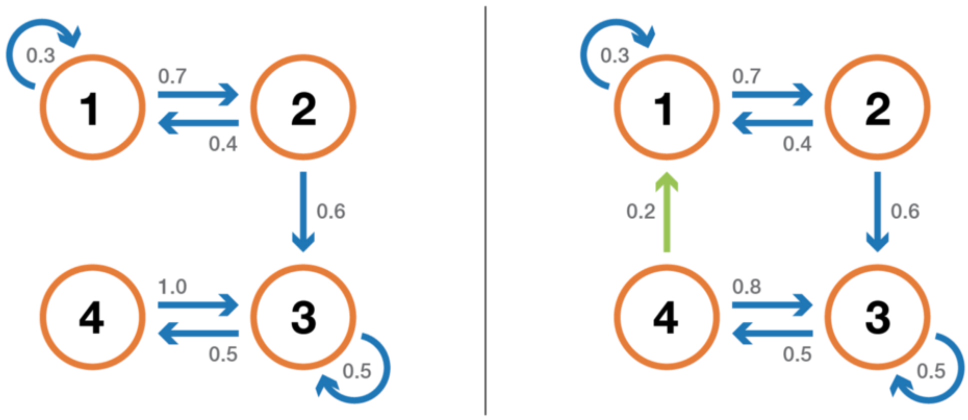


Иллюстрация свойства неразложимости (несокращаемости). Цепь слева нельзя сократить: из 3 или 4 мы не можем попасть в 1 или 2. Цепь справа (добавлено одно ребро) можно сократить: каждого состояния можно достичь из любого другого.

Состояние имеет период k, если при уходе из него для любого возврата в это состояние нужно количество этапов времени, кратное k (k — наибольший общий делитель всех возможных длин путей возврата). Если k = 1, то говорят, что состояние является апериодическим, а вся цепь Маркова является **апериодической**, если апериодичны все её состояния. В случае неприводимой цепи Маркова можно также упомянуть, что если одно состояние апериодическое, то и все другие тоже являются апериодическими.

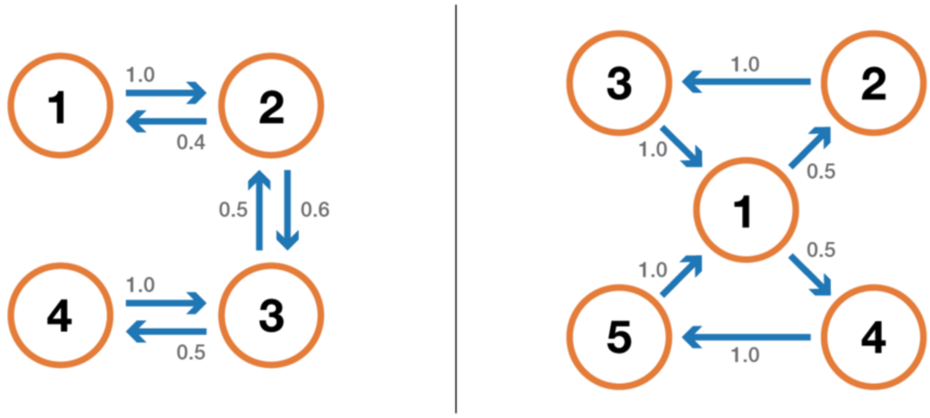


Иллюстрация свойства периодичности. Цепь слева периодична с k=2: при уходе из любого состояния для возврата в него всегда требуется количество шагов, кратное 2. Цепь справа имеет период 3.

Состояние является **невозвратным**, если при уходе из состояния существует ненулевая вероятность того, что мы никогда в него не вернёмся. И наоборот, состояние считается **возвратным**, если мы знаем, что после ухода из состояния можем в будущем вернуться в него с вероятностью 1 (если оно не является невозвратным).

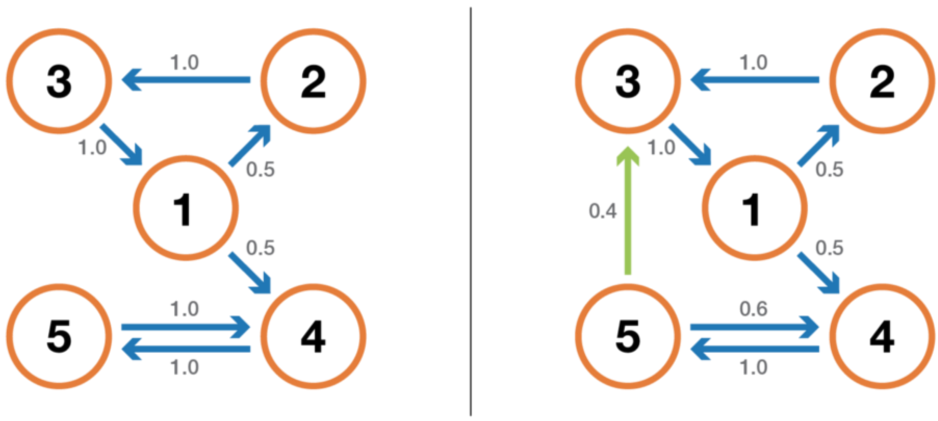


Иллюстрация свойства возвратности/невозвратности. Цепь слева имеет такие свойства: 1, 2 и 3 невозвратны (при уходе из этих точек мы не можем быть абсолютно уверены, что вернёмся в них) и имеют период 3, а 4 и 5 возвратны (при уходе из этих точек мы абсолютно уверены, что когда-нибудь к ним вернёмся) и имеют период 2. Цепь справа имеет ещё одно ребро, делающее всю цепь возвратной и апериодической.

Для возвратного состояния мы можем вычислить среднее время возвратности, которое является **ожидаемым временем возврата** при покидании состояния. Заметьте, что даже вероятность возврата равна 1, то это не значит, что ожидаемое время возврата конечно. Поэтому среди всех возвратных состояний мы можем различать **положительные возвратные состояния** (с конечным ожидаемым временем возврата) и **нулевые**

возвратные состояния (с бесконечным ожидаемым временем возврата).

Стационарное распределение, предельное поведение и эргодичность

В этом подразделе мы рассмотрим свойства, характеризующие некоторые аспекты (случайной) динамики, описываемой цепью Маркова.

Распределение вероятностей π по пространству состояний E называют **стационарным распределением**, если оно удовлетворяет выражению

$$\pi(e') = \sum_{e \in E} \pi(e) p(e, e') \qquad \forall e' \in E$$

Так как у нас есть

$$\pi(e') = \text{probability of being in } e' \text{ at the current step}$$
$$\sum_{e \in E} \pi(e) p(e, e') = \text{probability of being in } e' \text{ at the next step}$$

Тогда стационарное распределение удовлетворяет выражению

$$\begin{array}{l}\text{probability of being in} \\ e' \text{ at the current step}\end{array} = \begin{array}{l}\text{probability of being in} \\ e' \text{ at the next step}\end{array}$$

По определению, стационарное распределение вероятностей со временем не изменяется. То есть если исходное распределение q является стационарным, тогда оно будет одинаковых на всех последующих этапах времени. Если пространство состояний конечно, то p можно представить в виде матрицы, а π — в виде вектора-строки, и тогда мы получим

$$\pi = \pi p = \pi p^2 = \ldots$$

Это снова выражает тот факт, что стационарное распределение вероятностей со временем не меняется (как мы видим, умножение справа распределения вероятностей на p позволяет вычислить распределение вероятностей на следующем этапе времени). Учтите, что неразложимая цепь Маркова имеет стационарное распределение вероятностей тогда и только тогда, когда одно из её состояний является положительным возвратным.

Ещё одно интересное свойство, связанное со стационарным распределением вероятностей, заключается в следующем. Если цепь является положительной возвратной (то есть в ней существует стационарное распределение) и апериодической, тогда, какими бы ни были исходные вероятности, распределение вероятностей цепи сходится при стремлении интервалов времени к бесконечности: говорят, что цепь имеет **предельное распределение**, что является ничем иным, как стационарным распределением. В общем случае его можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = e'|X_0 = e) = \lim_{n\to\infty} p^n(e, e') = \pi(e') \qquad \forall (e, e') \in E \times E$$

Ещё раз подчеркнём тот факт, что мы не делаем никаких допущений об исходном распределении вероятностей: распределение вероятностей цепи сводится к стационарному распределению (равновесному распределению цепи) вне зависимости от исходных параметров.

Наконец, **эргодичность** — это ещё одно интересное свойство, связанное с поведением цепи Маркова. Если цепь Маркова неразложима, то также говорится, что она «эргодическая», потому что удовлетворяет следующей эргодической теореме. Допустим, у нас есть функция f(.), идущая от пространства состояний E к оси (это может быть, например, цена нахождения в каждом состоянии). Мы можем определить среднее значение, перемещающее эту функцию вдоль заданной траектории (временное среднее). Для n-ных первых членов это обозначается как

$$\frac{1}{n}(f(X_0) + f(X_1) + ... + f(X_{n-1})) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i)$$

Также мы можем вычислить среднее значение функции f на множестве E, взвешенное по стационарному распределению (пространственное среднее), которое обозначается

$$\sum_{e \in E} \pi(e) f(e)$$

Тогда эргодическая теорема говорит нам, что когда траектория становится бесконечно длинной, временное среднее равно пространственному среднему (взвешенному по стационарному распределению). Свойство эргодичности можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) = \sum_{e \in E} \pi(e) f(e)$$

Иными словами, оно обозначает, что в пределе ранее поведение траектории становится несущественным и при вычислении временного среднего важно только долговременное стационарное поведение.

Вернёмся к примеру с читателем сайта

Снова рассмотрим пример с читателем сайта. В этом простом примере очевидно, что цепь неразложима, апериодична и все её состояния положительно возвратны.

Чтобы показать, какие интересные результаты можно вычислить с помощью цепей Маркова, мы рассмотрим среднее время возвратности в состояние R (состояние «посещает сайт и читает статью»). Другими словами, мы хотим ответить на следующий вопрос: если наш читатель в один день заходит на сайт и читает статью, то сколько дней нам придётся ждать в среднем того, что он снова зайдёт и прочитает статью? Давайте попробуем получить интуитивное понятие о том, как вычисляется это значение.

Сначала мы обозначим

$$m(e, e') \equiv \text{ mean time to go from state } e \text{ to state } e'$$

Итак, мы хотим вычислить m(R,R). Рассуждая о первом интервале, достигнутом после выхода из R, мы получим

$$\begin{aligned} m(R,R) &= p_{R,N}(1+m(N,R)) + p_{R,V}(1+m(V,R)) + p_{R,R}(1+0) \\ &= 1 + [m(N,R) \times p_{R,N} + m(V,R) \times p_{R,V} + 0 \times p_{R,R}] \\ &= 1 + m(N,R) \times p_{R,N} + m(V,R) \times p_{R,V} \end{aligned}$$

Однако это выражение требует, чтобы для вычисления m(R,R) мы знали m(N,R) и m(V,R). Эти две величины можно выразить аналогичным образом:

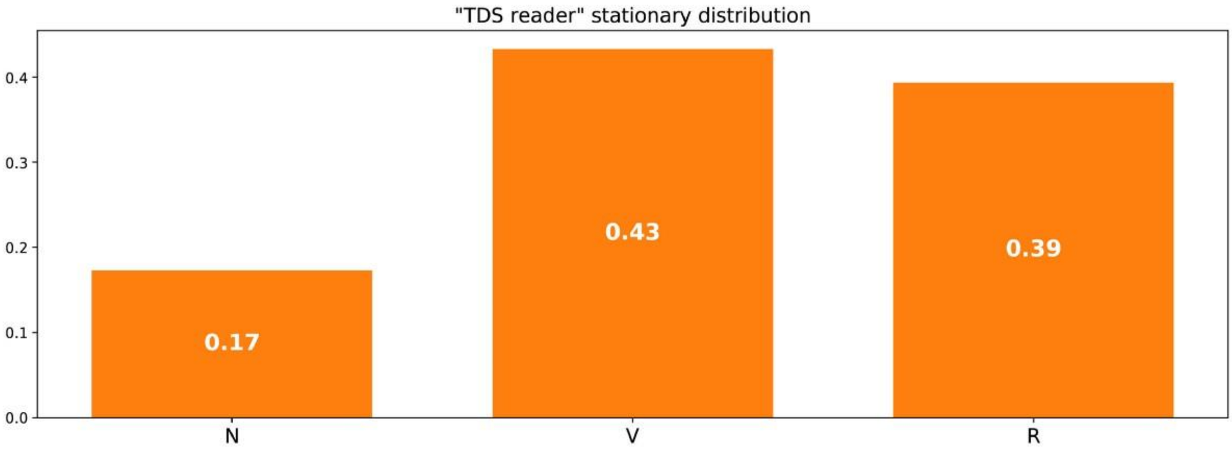
$$\begin{aligned} m(N,R) &= 1 + m(N,R) \times p_{N,N} + m(V,R) \times p_{N,V} \\ m(V,R) &= 1 + m(N,R) \times p_{V,N} + m(V,R) \times p_{V,V} \end{aligned}$$

Итак, у нас получилось 3 уравнения с 3 неизвестными и после их решения мы получим m(N,R) = 2.67, m(V,R) = 2.00 и m(R,R) = 2.54. Значение среднего времени возвращения в состояние R тогда равно 2.54. То есть с помощью линейной алгебры нам удалось вычислить среднее время возвращения в состояние R (а также среднее время перехода из N в R и среднее время перехода из V в R).

Чтобы закончить с этим примером, давайте посмотрим, каким будет стационарное распределение цепи Маркова. Чтобы определить стационарное распределение, нам нужно решить следующее уравнение линейной алгебры:

$$\pi = \pi p \iff \begin{pmatrix} \pi_N & \pi_V & \pi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_N & \pi_V & \pi_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.33 & 0.33 & 0.34 \end{pmatrix}$$

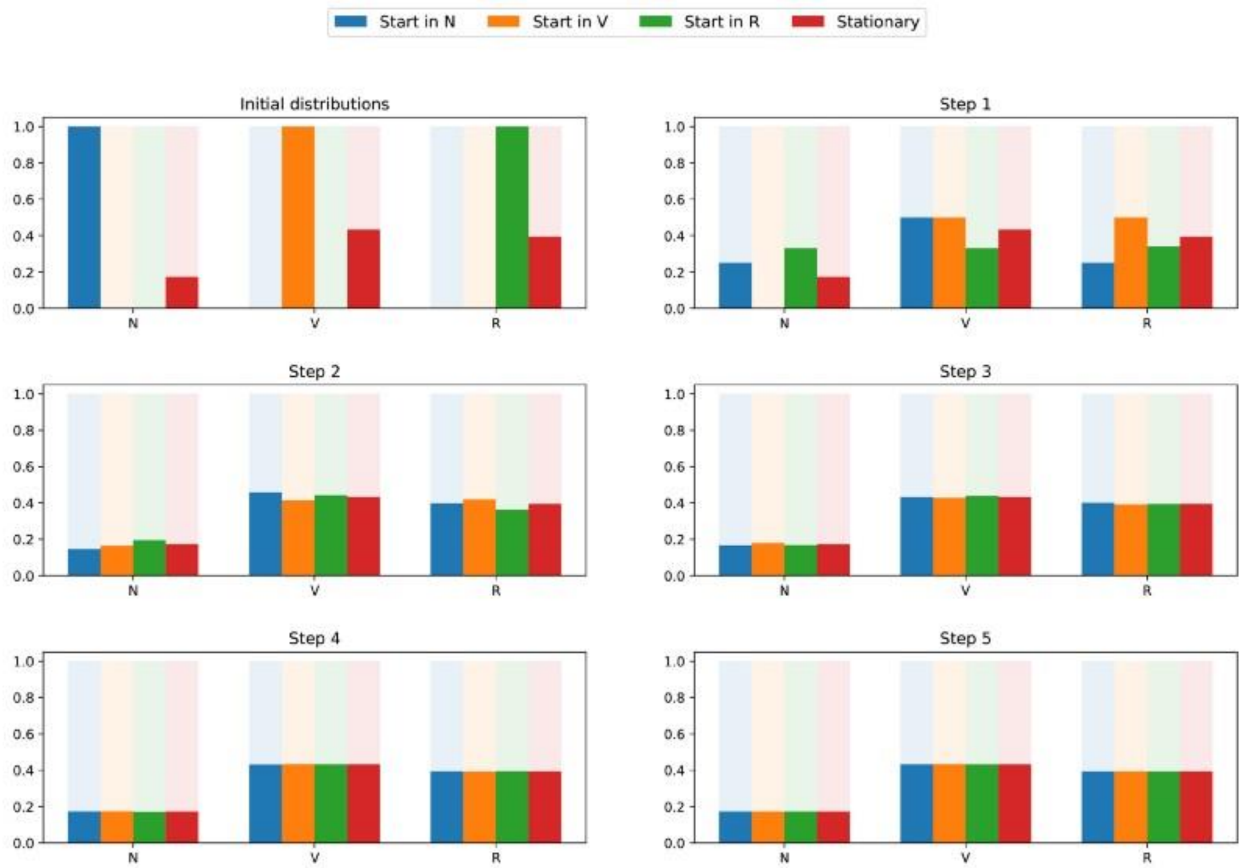
То есть нам нужно найти левый собственный вектор p, связанный с собственным вектором 1. Решая эту задачу, мы получаем следующее стационарное распределение:



Стационарное распределение в примере с читателем сайта.

Можно также заметить, что π(R) = 1/m(R,R), и если немного поразмыслить, то это тождество довольно логично (но подробно об этом мы говорить не будем).

Поскольку цепь неразложима и апериодична, это означает, что в длительной перспективе распределение вероятностей сойдётся к стационарному распределению (для любых исходных параметров). Иными словами, каким бы ни было исходное состояние читателя сайта, если мы подождём достаточно долго и случайным образом выберем день, то получим вероятность π(N) того, что читатель не зайдёт на сайт в этот день, вероятность π(V) того, что читатель зайдёт, но не прочитает статью, и вероятность π® того, что читатель зайдёт и прочитает статью. Чтобы лучше уяснить свойство сходимости, давайте взглянем на следующий график, показывающий эволюцию распределений вероятностей, начинающихся с разных исходных точек и (быстро) сходящихся к стационарному распределению:



Визуализация сходимости 3 распределений вероятностей с разными исходными параметрами (синяя, оранжевая и зелёная) к стационарному распределению (красная).

Классический пример: алгоритм PageRank

Настало время вернуться к PageRank! Но прежде чем двигаться дальше, стоит упомянуть, что интерпретация PageRank, данная в этой статье, не единственно возможная, и авторы оригинальной статьи при разработке методики не обязательно рассчитывали на применение цепей Маркова. Однако наша интерпретация хороша тем, что очень понятна.

Произвольный веб-пользователь

PageRank пытается решить следующую задачу: как нам ранжировать имеющееся множество (мы можем допустить, что это множество уже отфильтровано, например, по какому-то запросу) с помощью уже существующих между страницами ссылок?

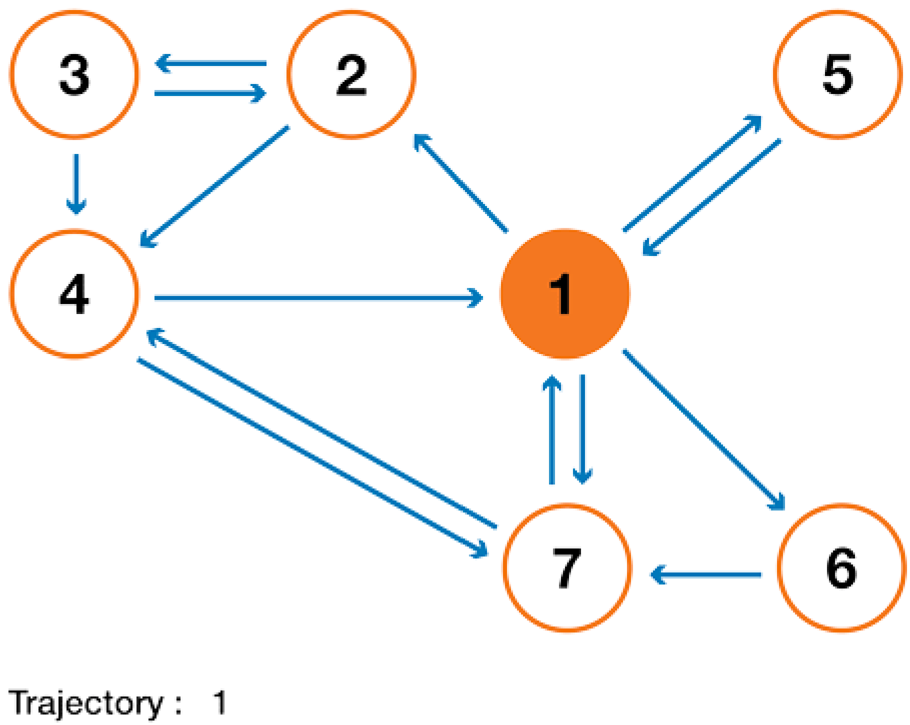
Чтобы решить эту задачу и иметь возможность отранжировать страницы, PageRank приблизительно выполняет следующий процесс. Мы считаем, что произвольный пользователь Интернета в исходный момент времени находится на одной из страниц. Затем этот пользователь начинает случайным образом начинает перемещаться, щёлкая на каждой странице по одной из ссылок, которые ведут на другую страницу рассматриваемого множества (предполагается, что все ссылки, ведущие вне этих страниц, запрещены). На любой странице все допустимые ссылки имеют одинаковую вероятность нажатия.

Так мы задаём цепь Маркова: страницы — это возможные состояния, переходные вероятности задаются ссылками со страницы на страницу (взвешенными таким образом, что на каждой странице все связанные страницы имеют одинаковую вероятность выбора), а свойства отсутствия памяти чётко определяются поведением пользователя. Если также предположить, что заданная цепь положительно возвратная и апериодичная (для удовлетворения этим требованиям применяются небольшие хитрости), тогда в длительной перспективе распределение вероятностей «текущей страницы» сходится к стационарному распределению. То есть какой бы ни была начальная страница, спустя длительное время каждая страница имеет вероятность (почти фиксированную) стать текущей, если мы выбираем случайный момент времени.

В основе PageRank лежит такая гипотеза: наиболее вероятные страницы в стационарном распределении должны быть также и самыми важными (мы посещаем эти страницы часто, потому что они получают ссылки со страниц, которые в процессе переходов тоже часто посещаются). Тогда стационарное распределение вероятностей определяет для каждого состояния значение PageRank.

Искусственный пример

Чтобы это стало намного понятнее, давайте рассмотрим искусственный пример. Предположим, что у нас есть крошечный веб-сайт с 7 страницами, помеченными от 1 до 7, а ссылки между этими страницами соответствуют следующему графу.



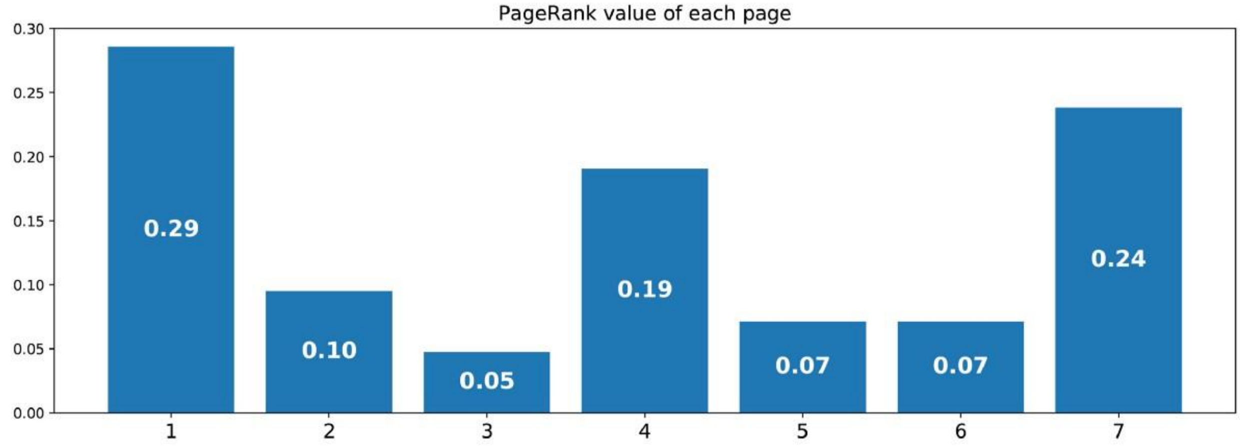
Ради понятности вероятности каждого перехода в показанной выше анимации не показаны. Однако поскольку подразумевается, что «навигация» должна быть исключительно случайной (это называют «случайным блужданием»), то значения можно легко воспроизвести из следующего простого правила: для узла с K исходящими ссылками (странице с K ссылками на другие страницы) вероятность каждой исходящей ссылки равна 1/K. То есть переходная матрица вероятностей имеет вид:

$$p = \begin{pmatrix} . & 0.25 & . & . & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ . & . & 0.5 & 0.5 & . & . & . \\ . & 0.5 & . & 0.5 & . & . & . \\ 0.5 & . & . & . & . & . & 0.5 \\ 1.0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1.0 \\ 0.5 & . & . & 0.5 & . & . & . \end{pmatrix}$$

где значения 0.0 заменены для удобства на ".". Прежде чем выполнять дальнейшие вычисления, мы можем заметить, что эта цепь Маркова является неразложимой и апериодической, то есть в длительной перспективе система сходится к стационарному распределению. Как мы видели, можно вычислить это стационарное распределение, решив следующую левую задачу собственного вектора

$$\pi = \pi p \qquad \text{with} \qquad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 \end{pmatrix}$$

Сделав так, мы получим следующие значения PageRank (значения стационарного распределения) для каждой страницы



Значения PageRank, вычисленные для нашего искусственного примера из 7 страниц.

Тогда ранжирование PageRank этого крошечного веб-сайта имеет вид 1 > 7 > 4 > 2 > 5 = 6 > 3.

Выводы

Основные выводы из этой статьи:

- случайные процессы — это наборы случайных величин, часто индексируемые по времени (индексы часто обозначают дискретное или непрерывное время)
- для случайного процесса марковское свойство означает, что при заданном текущем вероятность будущего не зависит от прошлого (это свойство также называется «отсутствием памяти»)
- цепь Маркова с дискретным временем — это случайные процессы с индексами дискретного времени, удовлетворяющие марковскому свойству
- марковское свойство цепей Маркова сильно облегчает изучение этих процессов и позволяет вывести различные интересные явные результаты (среднее время возвратности, стационарное распределение…)
- одна из возможных интерпретаций PageRank (не единственная) заключается в имитации веб-пользователя, случайным образом перемещающегося от страницы к странице; при этом показателем ранжирования становится индуцированное стационарное распределение страниц (грубо говоря, на самые посещаемые страницы в устоявшемся состоянии должны ссылаться другие часто посещаемые страницы, а значит, самые посещаемые должны быть наиболее релевантными)

В заключение ещё раз подчеркнём, насколько мощным инструментом являются цепи Маркова при моделировании задач, связанных со случайной динамикой. Благодаря их хорошим свойствам они используются в различных областях, например, в теории очередей (оптимизации производительности телекоммуникационных сетей, в которых сообщения часто должны конкурировать за ограниченные ресурсы и ставятся в очередь, когда все ресурсы уже заняты), в статистике (хорошо известные методы Монте-Карло по схеме цепи Маркова для генерации случайных переменных основаны на цепях Маркова), в биологии (моделирование эволюции биологических популяций), в информатике (скрытые марковские модели являются важными инструментами в теории информации и распознавании речи), а также в других сферах.

Разумеется, огромные возможности, предоставляемые цепями Маркова с точки зрения моделирования и вычислений, намного шире, чем рассмотренные в этом скромном обзоре. Поэтому мы надеемся, что нам удалось пробудить у читателя интерес к дальнейшему изучению этих инструментов, которые занимают важное место в арсенале учёного и эксперта по данным.

4. Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Динамическая система – объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени. Задано начальное состояние, в нулевой момент времени, а так же описан закон, описывающий эволюцию (изменение) начального состояния с течением времени.
Горизонт прогнозирования - это временной интервал, в пределах которого прогноз выполняется с заданной точностью.

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta << 1$, то есть две фазовые точки, расстояние мужду которыми $\leq \Delta$, различить нельзя. Пусть весь процесс происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером $R \sim 1$.
За время

$$T \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta}$$

где h - некоторое число, характеризующее скорость расхождения траекторий, траектории разойдутся на расстояние порядка размера системы, предсказать уже ничего нельзя.
Значит, увеличим время прогноза вдвое и посчитаем, как изменится Δ. Получится

$$\Delta_2 \sim \exp\left(-2hT\right) \sim \Delta^2$$

Небольшое пояснение к показателю Ляпунова

Рассмотрим линейное ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$

Его решение x с начальным условием $x(0) = x_0$ будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

Если теперь рассмотреть решение $\widetilde{x}$ с возмущенным начальным условием $\widetilde{x}(0) = x_0 + \delta x_0$, оно будет иметь вид:

$$\widetilde{x}(t) = (x_0 + \delta x_0)e^{\lambda t}$$

Для разности этих решений $\delta x = \widetilde{x} - x$ будет выполняться

$$\frac{d}{dt}\delta x = \lambda \cdot \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0$$
$$\delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$$

При этом величина λ называется показателем Ляпунова и при $\lambda > 0$ характеризует скорость расхождения близких траекторий: за время $t = 1/\lambda$ расхождение траекторий увеличивается в e раз, это время называется временем Ляпунова (также удобно использовать время $t = \ln 2/\lambda$, за которое расхождение увеличивается в 2 раза); при $\lambda < 0$, соответственно, траектории сходятся друг к другу.
λ может быть выражена через решения следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}$$

при этом в линейном случае результат не зависит от δx_0 и t и точки x_0, окрестность которой рассматривается.

В общем случае нас интересует поведение траекторий на достаточно большом времени при достаточно малых отклонениях от заданной точки x_0, поэтому для некоторого семейства отображений $x(t) = F(t; x_0)$ (которое может, например, отвечать решению какого-то ОДУ с начальным условием x_0) показатель Ляпунова можно определить следующим образом:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \lim_{\delta x\to 0} |\frac{F(t; x_0 + \delta x) - F(t; x_0)}{\delta x}| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\frac{\partial}{\partial x} F(t; x_0)|$$

В частности, если задано нелинейное ОДУ с гладкой функцией f

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и рассматривается окрестность стационарной точки $x_0 : f(x_0) = 0$:

$$\frac{d}{dt}\delta x = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\delta x + O(\delta x^2)$$

тогда при фиксированном t и достаточно малом начальном отклонении δx_0 выполняется

$$\delta x(t) \approx \delta x_0 \cdot e^{\lambda t}, \;\; \lambda = f'(x_0)$$

Рассмотрим теперь семейство отображений $\bar{x}(t) = F(t; \bar{x}_0)$ при $\bar{x} \in \Re^n$ (например, соответствующее решениям системы ОДУ) - в таком случае $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} F(t; \bar{x}_0)$ представляет собой линейный оператор (т.е. производная понимается в смысле Фреше), и есть смысл рассматривать его спектр - собственные значения или, в более общем случае, сингулярные числа: $\{\sigma_i(t)\}$. Спектр Ляпунова можно определить как $\{\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t)\}$, показателем расхождения траекторий будет наибольшее число в спектре.

В случае системы ОДУ по спектру в окрестности стационарной точки можно судить о ее устойчивости (все числа отрицательны) или неустойчивости (все числа положительны).

5. Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Математическая модель динамической системы: введены параметры (координаты), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор φ_t, позволяющий установить изменение координат во времени.

Аттрактор – притягивающее предельное множество.

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве рамерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения динамических систем.

Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий

Рассмотрим две фазовые точки, расстояние между которыми $\Delta(0)$ в начальный момент времени мало. В момент времени t оно равно $\Delta(t)$, причем $\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \sim e^{ht}$, где h – некоторое число, характеризующее скорость разбегания траекторий.

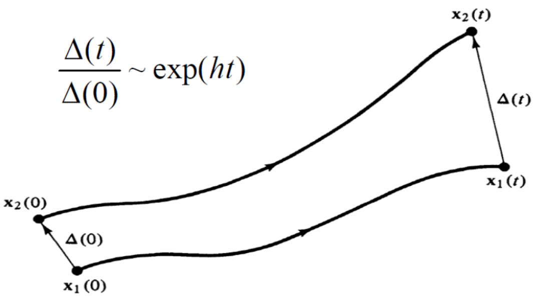


Рис. 1. Фазовые траектории.

В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию траекторий».

Показатель Ляпунова

Количественной мерой, характеризующей странный аттракторы, является число Ляпунова (характеристика экспоненциального разбегания)

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Например, в трехмерном пространстве существует 4 типа аттракторов, которые определяются показателем Ляпунова $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ – устойчивая неподвижная точка;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ – устойчивый предельный цикл;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ – устойчивый двумерный тор;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ – странный аттрактор.

6. Записать формальное определение эргодичности и прокомментировать его.

Эргодичность

Пусть фазовый объем сохраняется, движение происходит в некоторой ограниченной области D с объемом V_D, $h(x)$ – некоторая функция. Введем формулы:

$$\overline{h}(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(F^t(x))dt,$$

$$< h >= V_D^{-1} \int_D h(x)dV, \quad dV = dx_1, ..., dx_n.$$

Будем называть $\overline{h}(x)$ – среднее по времени, а $< h >$ – фазовое среднее.

Движение называется эргодическим, если для произвольной интегрируемой функции $h(x)$ и почти всех начальных условий x_0 справедливо равенство временных и фазовых средних:

$$\overline{h}(x_0) =< h > . \tag{1}$$

Если равенство (1) выполняется для всех (или почти всех) фазовых траекторий динамической системы, то система называется эргодической.

В эргодической системе относительное время, проведенное фазовой траекторией внутри некоторой области, равно относительному объему этой области (независимо от выбора начальных условий). Таким образом, траектория эргодической системы будет равномерно и плотно заполнять всё фазовое пространство D.

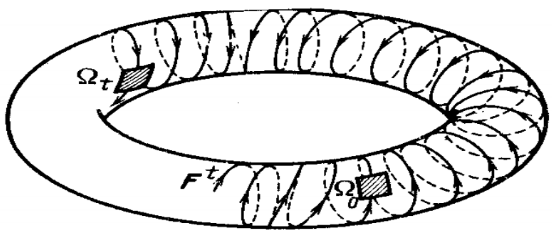


Рис. 1. Пример: квазипериодическое движение на поверхности тора (эргодическая траектория при иррациональном значении отношения частот).

7. Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Перемешивание

Системы, в которых начальный элементарный объем сильно деформируется, выпуская многочисленные отростки, становящиеся все более тонкими и протяженными. Начальная область так распределится по фазовому пространству, что ее кусочки можно будет обнаружить в любой части фазового пространства гиперповерхности (или, для диссипативных систем – в любой части притягивающего инвариантного множества). Подобное свойство динамической системы называют перемешиванием.

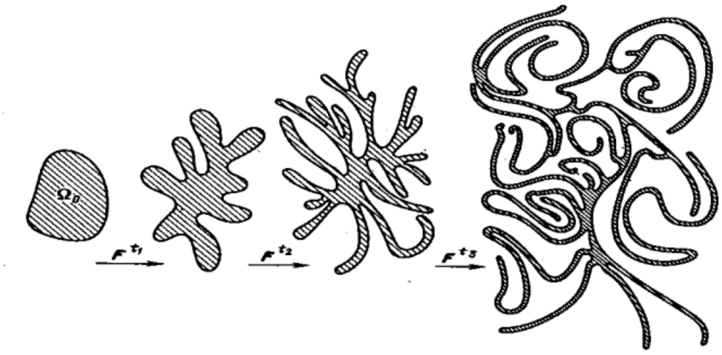


Рис. 1. Перемешивание.

Если A и B – произвольные малые области, $A_t = \varphi_t(A)$, то формально перемешивание определяется как

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(A_t \cap B)}{V(B)} = \frac{V(A)}{V(D)} = \mu(A).$$

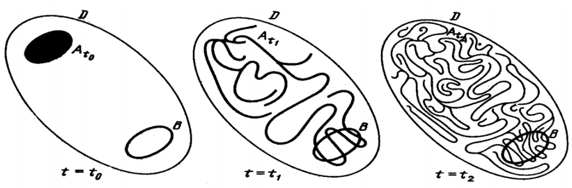


Рис. 2. Перемешивание (формально).

Пример Гиббса

После перемешивания взятая на пробу капля содержит долю чернил, равную отношению объема области D_0 к объему стакана, независимо от формы и положения D_0 и D_1.

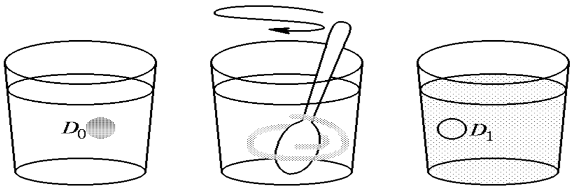


Рис. 3. Пример Гиббса.

Определения сильного и слабого перемешивания

Динамическая система $\{F^t\}$ называется **сильно** перемешивающей, если для любых $f,\, h \in L^2(M,\, \mathfrak{M},\, \mu)$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int f(F^t x)h(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\int h(x)d\mu(x)\right) = 0.$$

Динамическая система $\{F^t\}$ называется **слабо** перемешивающей, если для любых $f,\, h \in L^2(M,\, \mathfrak{M},\, \mu)$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int f(F^t x)h(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\int h(x)d\mu(x)\right| = 0.$$

Перемешивание vs эргодичность

Динамическая система с перемешиванием эргодична. Обратное неверно: например, движение на торе с иррациональным отношением частот эргодично, но не перемешивает.

Пусть $t_0, t_1, \dots t_n$ точки дискретного времени, такие что $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k = const$. Пусть $N(\Delta t_k)$ - двумерная таблица с эмпирическими данными, где каждый элемент $n_{ij}(\Delta t_k)$ - число наблюдений,в которых произошел переход из состояния i в состояние j за время Δt_k. Обозначим $n_i(t_k)$ - число наблюдений, где объект находился в состоянии i в момент времени t_k.

Тогда элементы $p_{ij}(t_k)$ матрицы переходных вероятностей P имеют вид

$$p_{ij}(t_k) = \frac{n_{ij}(\Delta t_k)}{n_i(t_k)}$$

Из свойств матрицы переходных вероятностей знаем, что

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} \qquad \forall i$$

Теорема Куратовского – Понтрягина:

Теорема:

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Доказательство:

▷

Заметим, что из планарности графа следует планарность гомеоморфного графа и наоборот. В самом деле, пусть G_1 — плоский граф. Если добавить на нужных ребрах вершины степени 2 и удалить некотрые вершины степени 2 в G_1, получим укладку гомеоморфного графа G_2. Таким образом, доказательство необходимости следует из непланарности K_5 и $K_{3,3}$.

Докажем достаточность. От противного: пусть существует непланарный граф, который не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Пусть G — такой граф с наименьшим возможным числом рёбер, не содержащий изолированных вершин.

G связен

Если G не связен, то в силу минимальности G его компоненты связности планарны и, следовательно, сам граф G планарен.

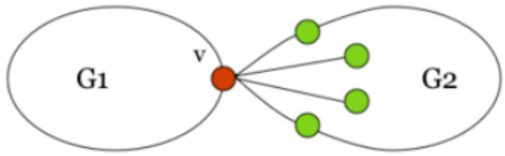
G — обыкновенный граф

В самом деле, пусть в графе G есть петля или кратное ребро e. Тогда в силу минимальности G граф $G - e$ планарен. Добавляя ребро e к графу $G - e$ получим, что граф G планарен.

G — блок

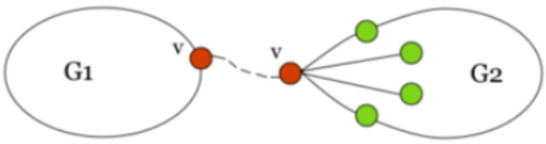
Пусть, от противного, в графе есть точка сочленения v. Через G_1 обозначим подграф графа G, порождённый вершинами одной из компонент связности графа $G - v$ и вершинной v, а через G_2 подграф графа G, порождённый вершинами остальных компонент связности графа $G - v$ и вершиной v.

В силу минимальности G, G_1 и G_2 — планарны.

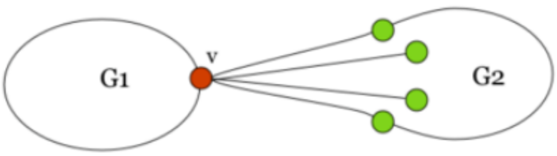


Возьмём укладку графа G_1 на плоскости такую, что вершина v лежит на границе внешней грани. Ее можно получить, взяв любую укладку G_1 на плоскости, по ней построив укладку на шаре, используя обратную стереографическую проекцию[1], потом повернуть сферу так, чтоб v оказалась на внешней грани стереографической проекции повернутого шара.

Затем во внешней грани графа G_1 возьмём укладку графа G_2 такую, что вершина v будет представлена на плоскости в двух экземплярах.



Соединим два экземпляра вершины v пучком жордановых линий, не допуская лишних пересечений с укладками графов G_1 и G_2, состоящим из такого количества линий, какова степень вершины v в графе G_2. Далее отбросим вхождение вершины v в граф G_2, заменяя инцидентные ей рёбра на жордановы линии, полученные из линий указанного пучка и рёбер.



Таким образом мы получили укладку графа G на плоскости, что невозможно.

В G нет мостов

Граф G не равен K_2 и в нем нет точек сочленения, следовательно в G нет мостов.

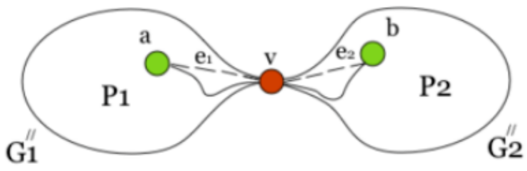
В G' существует цикл, содержащий вершины a и b

Пусть $e = ab$ — произвольное ребро графа G, $G' = G - e$.

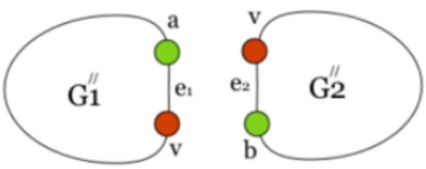
1. граф G' планарен в силу минимальности графа G.
2. граф G' связен в силу отсутствия в графе G мостов.

Пусть a и b лежат в одном блоке B графа G'.

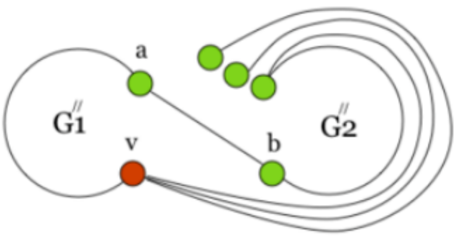
1. Если $|VB| \geqslant 3$, то существует цикл графа G', содержащий вершины a и b.
2. Если $|VB| = 2$, то в B имеется ребро $e' = ab$, но тогда в G имеются кратные рёбра e и e', что невозможно.
3. Если вершины a и b лежат в разных блоках графа G', что существует точка сочленения v, принадлежащая любой простой (a, b) — цепи графа G'. Через G'_1 обозначим подграф графа G', порождённый вершиной v и вершинами компоненты связности графа $G' - v$, содержащей a, а через G'_2 — подграф графа G', порождённый вершиной v и вершинами остальных компонент связности графа $G' - v$ (в этом множестве лежит вершина b). Пусть $G''_1 = G'_1 + e_1$, где $e_1 = vb$ — новое ребро.



Заметим, что в графе G''_1 рёбер меньше, чем в графе G. Действительно, вместо ребра e в G''_1 есть ребро e_1 и часть рёбер из графа G осталась в графе G''_2. Аналогично, в графе G''_2 рёбер меньше, чем в графе G.
Теперь в силу минимальности графа G графы G''_1 и G''_2 планарны. Возьмем укладку графа G''_1 на плоскости такую, что ребро $e_1 = av$ лежит на границе внешней грани(ее существование доказывается аналогично существованию такой укладки для вершины графа). Во внешней грани графа G''_1 возьмем укладку графа G''_2 такую, что ребро $e_2 = vb$ лежит па границе внешней грани.



Отметим, что опять вершина v представлена на плоскости в двух экземплярах. Очевидно, добавление ребра $e = ab$ не меняет планарности графа $G''_1 U G''_2$. Склеим оба вхождения вершины v точно так же, как это мы сделали в предыдущем пункте доказательства.



Сотрем затем ранее добавленные ребра e_1 и e_2. В результате мы получим укладку графа G на плоскости, что невозможно. Утверждение доказано.

Плана́рный граф — граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер не по вершинам. Какое-либо конкретное изображение планарного графа на плоскости называется **плоским графом**. Иначе говоря, планарный граф изоморфен некоторому плоскому графу, изображённому на плоскости так, что его вершины — это точки плоскости, а рёбра — кривые на плоскости, которые если и пересекаются между собой, то только по вершинам. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его **гранями**. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, называемая **внешней гранью**. Любой плоский граф может быть спрямлён, то есть перерисован на плоскости так, что все его рёбра будут отрезками прямых.

Гомеоморфи́зм (греч. ὅμοιος — похожий, μορφή — форма) — взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение топологических пространств. Иными словами, это биекция, связывающая топологические структуры двух пространств, поскольку, при непрерывности биекции, образы и прообразы открытых подмножеств являются открытыми множествами, определяющими топологии соответствующих пространств.

Пространства, связанные гомеоморфизмом, топологически неразличимы. Можно сказать, что топология (в общем виде) изучает неизменные при гомеоморфизме свойства объектов.

В категории топологических пространств рассматриваются только непрерывные отображения, поэтому в этой категории изоморфизм является также и гомеоморфизмом.

1 Топологическая энтропия

Топологическая энтропия — в теории динамических систем неотрицательное вещественное число, которое является мерой сложности системы. Пусть задано непрерывное отображение T метрического компакта (X, d) в себя. Тогда метрика d_n на X определяется как

$$d_n(x,y) = \max_{0<=j<=n} d(T^j(x), T^j(y)) \tag{1}$$

Иными словами, это максимальное расстояние, на которое орбиты x и y расходятся за n итераций. Далее, для заданного $\varepsilon > 0$, говорят, что множество — (n,ε) -отделённое, если попарные d_n-расстояния между его точками не меньше ε, и мощность наибольшего такого множества обозначается через N (n , ε). Тогда топологической энтропией отображения T называется двойной предел

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} log N(n,\varepsilon) \tag{2}$$

Определение формализует следующее нестрогое понятие: для неизвестной начальной точки, какое количество информации нужно получить в расчёте на одну итерацию, чтобы предсказать большое количество итераций с небольшой фиксированной ошибкой.

2 Отличие топологической энтропии от метрической

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Метрическая энтропи описывает хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, а топологическая энтропия описывает хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

3 P.S. Метрическая энтропия

Пусть(X,T,μ) — сохраняющая меру измеримая динамическая система. По определению, энтропией разбиения $X = \bigcup_{j=1}^{n} \xi_j$ называется число

$$H(\xi) := \sum_{j=1}^{n} -\mu(\xi_j)\log\mu(\xi_j),$$

определяющее информационную энтропию определения элемента разбиения, содержащего μ-случайную точку.

Итерационные измельчения разбиения ξ,

$$\xi^{(k)} = \{\xi_{i_1} \cap T^{-1}(\xi_{i_2}) \cap \cdots \cap T^{-k+1}(\xi_{i_k}) \mid 1 \le i_1,\ldots,i_k \le n\}$$

определяют, в каких элементах ξ оказывается точка на протяжении k итераций, а, соответственно, величина

$$h_\mu(T,\xi) = \lim \frac{1}{k} H(\xi^{(k)})$$

выражает информационную энтропию такого процесса. Наконец, **метрическая энтропия** отображения T по мере μ определяется как точная верхняя грань $h_\mu(\xi)$ по всевозможным разбиениям ξ:

$$h_\mu(T) := \sup_\xi h_\mu(T,\xi).$$

Формула связи между топологической энтропией и фрактальной размерностью

Выборочная энтропия Шеннона: $H(a) = -\sum\limits_{i=1}^{N(a)} p_i log_2 p_i$, где a - элемент покрытия.

При уменьшении размеров покрытия $a \to 0$ и роста числа элементов этого покрытия $N(a) \to \infty$ энтропия Шеннона неограниченно возрастает $H(a) \to \infty$. Тогда вводится понятие верхней и нижней информационной размерности:

$$d_{\inf} = \lim_{a \to 0} \inf \frac{H(a)}{log_2 \frac{1}{a}};$$

$$d_{\sup} = \lim_{a \to 0} \sup \frac{H(a)}{log_2 \frac{1}{a}}.$$

Энтропия достигает максимального значения при равенстве вероятностей $p_i = \frac{1}{N}(a)$. Тогда $d_1 = \lim\limits_{a \to 0} \frac{log_2 N(a)}{log_2 \frac{1}{a}}$ - фрактальная размерность (емкость аттрактора).

1 Практика 3

1.1 3. Требования к марковской матрице переходных вероятностей.

Последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 0$ со значениями в некотором не более чем счетном множестве S(множестве состояний) называется (однородной) марковской цепью, если для любых значений $k_i \in S$ выполнено соотношение

$$P(X_{n+1} = k|X_0 = k_0, ..., X_n = k_n) = P(X_{n+1} = k|X_n = k_n) = P(X_1 = k|X_0 = k_n) \tag{1}$$

(будущее зависит от прошлого через настоящее).

Пример. Пусть $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых бернуллиевских с.в. Тогда $\{X_n\}$ - марковская цепь. Действительно,

$$P(X_{n+1} = k|X_0 = k_0, ..., X_n = k_n) = P(X_{n+1} - X_n = k - k_n|X_0 = k_0, .., X_n = k_n) = P(X_{n+1} - X_n = k - k_n) = \\ = P(\xi_i = k - k_n) = P(X_1 = k|X_0 = k_n) \quad (2)$$

Величина $p_{ik} = P(X_1 = k|X_0 = i)$ называется переходной вероятностью. Ее можно интерпретировать как вероятность перехода цепи из состояния i в состояние k за единицу времени. Матрица P: $(P)_{ik} = p_{ik}$ называется матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Основные требования к матрице перехода:

1) Так как матрица образует полную группу, то очевидно, сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$\sum_{k \in S} p_{ik} = 1$$

2) Как было сказано ранее, матрица состоит из условных вероятностей, следовательно $0 \leq p_{ik} \leq 1$
3) Условные вероятности зависят только от состояний i и k.
4) Сумма элементов в любой строке должна равняться 1.

Простейшим примером такой матрицы служит:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

где $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. В частности, при $\alpha = \beta = 0$ получаем единичную матрицу.

Грубость, или структурная устойчивость — важнейшее условие корректности задания модели, а корректность задание - важнейшее требование к математической модели. Основная идея: достаточно малые изменения грубой системы должны приводить к соответственно малым изменениям в динамике ее поведения. Только грубые системы могут описывать реальные процессы. Поэтому теорема Андронова-Понтрягина имеет важное значение для поиска состояний равновесия системы.

Рассмотрим множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением $x' = X(x)$, где $X(x_1, x_2)$ — $\mathbb{C}^r$-гладкая (непрерывно-дифференцируемая до порядка r) функция ($r \geq 1$), определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$.

Введем на этом множестве следующую норму:

$$||X||_{\mathbb{C}^1} = \sup_{x \in G} \left(||X|| + ||\frac{\partial X}{\partial x}||\right).$$

В данной норме множество систем становится банаховым пространством, которое мы обозначаем B или B_G. Банахово пространство — нормированное векторное пространство, полное по метрике, порождённой нормой.

Также определим δ-окрестность системы X как множество всех систем $\widetilde{X}$, удовлетворяющих условию $||\widetilde{X} - X||_{\mathbb{C}^1} < \delta$.

Определение. Динамическая система X называется грубой в области G, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

1. все системы в δ-окрестности системы X топологически эквивалентны X;
2. гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε-близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε).

Естественно наложить некоторые ограничения, касающиеся границы ∂G области G, как это было сделано в исходном определении грубости, а именно: ∂G должна быть гладкой замкнутой кривой, не касательной к векторному полю (кривой без контакта). Заметим, что в случае динамических систем на компактных гладких поверхностях область G совпадает со всей поверхностью таким образом, каких-либо граничных условий не возникает.

Теорема Андронова-Понтрягина. Система X является грубой в плоской области G тогда и только тогда, когда

1. не существует состояний равновесия с характеристическим показателем на мнимой оси;
2. не существует периодических орбит с мультипликатором на единичной окружности;
3. не существует сепаратрис, идущих из седла в другое (или то же самое) седло.

Характеристический показатель (Ляпунова) функции $d(t)$ — действительное число, определяемое соотношением $\lambda = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} ln|\frac{d(t)}{d_0}|$. Это величина, характеризующая скорость удаления друг от друга траекторий. Положительность показателя Ляпунова обычно свидетельствует о хаотическом поведении системы.

Видимо, как раз первое условие подразумевает, что состояния равновесия — узлы, фокусы, седла (положение "центр"достигается как раз при чисто мнимом показателе).

Мультипликатор периодической точки — в теории динамических систем, собственное значение дифференциала отображения за период в этой точке.

Последнее условие может быть переформулировано как отсутствие гомоклинических и гетероклинических траекторий. Гомоклинические траектории — траектории, которые выходят и приходят в одно и то же положение равновесия (см. аттрактор Лоренца). Гетероциклические — которые выходят из одного положения равновесия и приходят в другое. Сепаратрисы седла — кривые, которые в точке покоя касаются прямых-ассимптот.

Из приведенной выше теоремы следует, что грубая система на плоскости может обладать только грубыми состояниями равновесия (узлами, фокусами и седлами) и грубыми предельными циклами. Что касается сепаратрис седел, они либо асимптотически стремятся к узлу, фокусу или предельному циклу, или покидают область G за конечный отрезок времени.

Очевидно, что эта картина сохраняется при малых гладких возмущениях. Поэтому грубые системы образуют открытое подмножество в пространстве B_G.

Более того, из представленных ниже простых соображений, основанных на повороте векторного поля, следует, что если X не является грубой системой, то для любых $\delta > 0$ существует грубая система, которая δ-близка к X. Другими словами, грубые системы образуют плотное множество в B_G.

Из теоремы Андронова–Понтрягина непосредственно следует, что грубая система может обладать только конечным числом состояний равновесия и периодических орбит в G.

Необходимость условий (1) и (2) теоремы Андронова–Понтрягина очевидна. Действительно, если система грубая в G, она должна оставаться грубой и в любой подобласти G. Поэтому, выбрав малую окрестность состояния равновесия, заключаем, что система в окрестности этого состояния равновесия также должна быть грубой. Аналогичное наблюдение верно и для грубых предельных циклов.

Доказательство 3-го условия см. в

`https://www.researchgate.net/publication/259036367_Metody_kacestvennoj_teorii_v_nelinejnoj_dinamike_Cast_2`, стр. 30–31.

Теория_2. Формулировка и смысл т. Гробмана-Хартмана.

$\exists$ множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, отображение $f: U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и точка $0 \in U$ - гиперболическая неподвижная точка f.

Тогда $\exists$ окрестности U_1, U_2, V_1, V_2 точки 0 и такой гомеоморфизм $h: U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$, что $f = h^{-1} \circ Df_0 \circ h$ на U_1.

$\boxed{\text{Значение:}}$ В окрестности неподвижной гиперболической точки отображение топологически сопряжено со своей линейной частью (Другими словами: в окрестности гиперболической неподвижной точки поведение динамической системы с точностью до непрерывной замены координат совпадает с поведением ее линеаризации).

$\Downarrow$ смысл.

Благодаря этой теореме можно использовать для анализа поведения вокруг состояния равновесия более простую линеаризацию.

---

① 0-неподвижная точка ~ точка, которую заданное отображение переводит в нее же.

① Линейное отображение $\mathbb{R}^n$ называется гиперболическим, если абсолютные величины всех его с/зн $\neq 1$.

Теория 3. Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Характеристика Эйлера-Пуанкаре - целочисленная характеристика топологического пространства. Эйлерова характеристика пространства X обычно обозначается $\chi(X)$.

Для того, чтобы вычислить характеристику поверхности, можно:

- Задать ее триангуляцию (эйлерова характеристика не зависит от выбора триангуляции, является топологическим инвариантом). Для многогранника $\chi(S)$ = число вершин − число ребер + число граней;

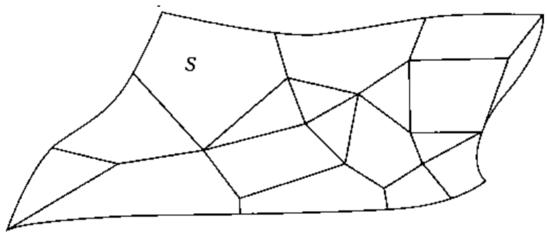


Рис. 1: Триангуляция поверхности S

- Для сферы $\chi(S) = 2$;
- Для тора $\chi(S) = 0$;
- Представить поверхность как связную сумму торов. Характеристика Эйлера для связной суммы g торов $\chi(S) = 2 - 2g$.

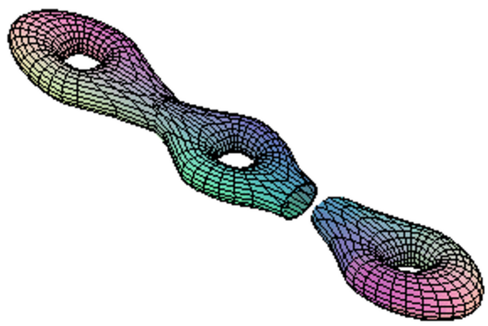


Рис. 2: Связная сумма трех торов, $\chi = -4$, $g = \gamma = 3$

Теорема 3.1 *Среди компактных поверхностей гиперболическими являются в точности те, которые имеют отрицательную* χ *− характеристику*

Род поверхности — топологическая характеристика замкнутой поверхности S. Определяется как максимальное число замкнутых непересекающихся кривых, не разделяющих поверхность на части.

Род поверхности γ связан с характеристикой Эйлера: $\chi = 2 - 2\gamma$. Таким образом, отрицательную χ−характеристику имеют поверхности с $\gamma > 1$. Гиперболическими являются все компактные поверхности за исключением семи следующих: сфера, диск, кольцо, тор, лента Мебиуса, проективная плоскость и бутылка Клейна

Грубая или структурно устойчивая система не меняет свой топологический тип фазовой диаграммы при “малом шевелении” векторного поля динамической системы.

Пусть дано множество двумерных систем на плоскости, заданных уравнением $x' = X(x)$, где $X(x_1, x_2)$ - C^r - гладкая ($r \geqq 1$) функция, определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset R2$.

Определение: Динамическая система X называется грубой в области G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что:

1. все системы в δ -окрестности X топологически эквивалентны X;
2. гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε -близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками $< \varepsilon$).

При этом δ -окрестность системы X как множество всех систем X^1, удовлетворяющих условию:

$$||X^1 - X||_{C1} < \delta,$$

где на множестве введена норма:

$$||X||_{C1} = \sup_{x \in G} \left(||X|| + ||\partial X / \partial x|| \right)$$

Неблуждающее множество

Материал из Википедии — свободной энциклопедии [править | править код]

В теории динамических систем, **неблуждающее множество** — один из вариантов определения аттрактора, формализующий описание «точка несущественна для аттрактора, если у неё есть окрестность, которую каждая орбита посещает не больше одного раза».

Содержание [скрыть]

Определение [править | править код]

Точка x динамической системы называется **блуждающей**, если итерации некоторой её окрестности U никогда эту окрестность не пересекают:

$$\forall n > 0 \quad f^n(U) \bigcap U = \emptyset.$$

Иными словами, точка блуждающая, если у неё есть окрестность, которую любая траектория может пересечь только один раз. Множество всех точек, не являющихся блуждающими, называется **неблуждающим** множеством.

Свойства [править | править код]

- Неблуждающее множество является замкнутым инвариантным относительно динамики множеством.
- Неблуждающее множество содержит все неподвижные и периодические точки системы.
- Неблуждающее множество содержит носитель любой инвариантной меры.

ома определяемых далее понятий.

4) Во избежание недоразумений формулируем точное определение блуждающих и неблуждающих точек, относящееся ко всем случаям.

Точка P_0 называется *блуждающей*, если существует открытое множество σ_0 и вещественное число t_1, такие, что σ_0 содержит P_0 и что σ_t не имеет общих точек с σ_0 при всяких $t > t_1$. В противном случае точка P_0 называется *неблуждающей*.

асимптотически.

§ 2. Блуждающие и неблуждающие движения. Рассмотрим произвольную точку P_0 многообразия состояний движения M. Пусть σ будет открытое связное множество малого диаметра ε[2], содержащее P_0 ([3]). При возрастании времени t эта «частица» σ движется. Может случиться, что P_0 представляет состояние равновесия; в этом

[1]«Mèthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. 3, гл. 26.

[2]Очевидно, что в M можно определить расстояние надлежащим образом. Диаметром совокупности точек будет тогда просто верхняя грань расстояний двух точек этой совокупности.

случае частица σ все время будет содержать P_0; временно мы исключим этот случай из рассмотрения. Во всяком другом случае σ через некоторое время придет в положение, не имеющее общих точек с ее первоначальным положением σ_0, если только σ_0 достаточно мало; это следует из того, что составляющие скорости dx_i/dt для всех точек частицы приблизительно такие же, как для P_0. Если можно выбрать ε настолько малым, чтобы σ после этого никогда не налегала на свое первоначальное положение, то мы будем называть P_0 «блуждающей точкой» и соответственное движение «блуждающим движением».

В противном случае точку P_0 мы будем называть «неблуждающей точкой» и соответственное движение «неблуждающим движением». Неблуждающими мы будем, разумеется, называть также точки равновесия и соответственные вырождающиеся «движения»([4]).

В этих определениях имеется кажущаяся асимметрия между направлениями возрастания и убывания времени t. Но легко видеть, что фактически нет никакой асимметрии. Действительно, если частица σ налегает на свое первоначальное положение σ_0 через промежуток времени τ, то она ведет себя так же через промежуток времени $-\tau$; потому что, если частицы σ_0 и σ_τ, налегают друг на друга, то $\sigma_{-\tau}$ и σ_0, очевидно, тоже налегают друг на друга.

Таким образом, блуждающая точка P_0 характеризуется тем, что соответственная частица σ описывает n-мерную трубку, нигде не пересекающую самое себя, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$([5]). По этой причине название «блуждающая» представляется законным, так как точка никогда не возвращается в бесконечно малую окрестность какой-нибудь раз пройденной точки([6]).

Совокупность W всех блуждающих точек многообразия представляет собой открытую совокупность, состоящую из кривых движения. Совокупность M_1 неблуждающих точек M состоит из дополнительной замкнутой совокупности кривых движения([7]).

Из того, что было сказано выше, сразу следуют все части этого утверждения, кроме разве того, что W открыто и, следовательно, M_1 замкнуто. Но если P_0 есть блуждающая точка, то таковыми, очевидно, будут все точки частицы σ, содержащей P_0([8]). Отсюда тотчас же следует, что W — открытая совокупность и, значит, M_1 — замкнутая совокупность.

Если совокупность M содержит точки, не являющиеся предельными точками совокупности W, то эти точки образуют подмножество M_1' множества M_1, состоящее из кривых движения и обладающее свойством региональной рекуррентности.

Очевидно, что M_1' состоит из кривых движения, потому что если какая-нибудь точка Q совокупности M_1 не находится в непосредственном соседстве ни с какой кривой движения, принадлежащей W, то то же самое будет справедливо относительно любой точки кривой движения, проходящей через Q(9). Мы видим также, что достаточно малая частица, содержащая Q, будет вся содержаться в M_1', так что M_1' является открытой совокупностью неблуждающих точек. Отсюда следует свойство региональной рекуррентности.

Очевидно, что совокупность $M_1'' = M_1 - M_1'$ представляет собою просто границу открытых n-мерных совокупностей W, M_1'(10). Она является состоящим из кривых движения замкнутым множеством размерности, меньшей n.

С возрастанием или убыванием времени любая блуждающая точка приближается асимптотически к совокупности M_1.

Это основное свойство блуждающих движений доказывается очень просто. Рассмотрим любую открытую окрестность множества M_1 и дополнительную замкнутую совокупность C, состоящую исключительно из блуждающих точек. Около каждой точки, принадлежащей C, может быть построена маленькая частица σ, которая при своем движении никогда не будет налегать на свое первоначальное положение. Следовательно, можно найти конечное число таких частиц, покрывающих полностью C. Движущаяся точка может войти в одну из таких частиц, которые мы считаем неподвижными, только однажды и оставаться там короткий промежуток времени. Отсюда очевидно, что она по истечении некоторого конечного промежутка времени будет оставаться в данной окрестности совокупности M_1. Следовательно, всякая движущаяся точка будет приближаться асимптотически к M_1, что и требовалось доказать.

Более внимательное изучение обнаруживает некоторые дальнейшие особенности способа приближения блуждающих движений к неблуждающим движениям. Так как в предыдущем рассуждении движущаяся точка входила в какую-нибудь из неподвижных частиц, покрывающих C, только однажды и оставалась там в течение короткого промежутка времени, то мы сможем высказать следующее положение.

Всякое блуждающее движение остается вне какой-нибудь выбранной окрестности совокупности M_1 в течение конечного времени T и покидает эту окрестность конечное число N раз, где N и T равномерно ограничены, коль скоро окрестность множества M_1 выбрана[1](11).

§ 3. Последовательность M, M_1, M_2, ... Придя к замкнутой совокупности M_1(12), между точками которой расстояние может быть

[1]Для того, чтобы сделать счет выводов точным, мы должны были бы выбрать покрывающие частицы таким образом, чтобы каждая из них отсекала самое большее один отрезок от каждой кривой движения, и затем рассматривать, гак окрестность совокупности M_1, дополнение к сумме этих частиц.

$f(p,t)$ - движение динамической системы, (X,ρ) - произвольное метрическое пространство.

Определение 1. Точка $p \in X$, движение $f(p,t)$, полутраектория $f(p,I^+)$ $(f(p,I^-))$ называются *положительно (отрицательно) устойчивыми по Лагранжу* или *устойчивыми* L^+ (L^-), если $\overline{f(p,I^+)}$ $(\overline{f(p,I^-)})$ - компактное множество, что эквивалентно тому, что $f(p,I^+) \in K$ $(f(p,I^-) \in K)$, где K - компактное множество в X.

Определение 2. Если существуют последовательность $t_n \longrightarrow \infty$, $t_n \geq 0$, при $n \longrightarrow \infty$ и точка $q \in X$ такие, что $f(p,t_n) \longrightarrow q$, то точка q называется $\omega-$*предельной точкой* движения $f(p,t)$ (траектории $f(p,I)$, положительной полутраектории $f(p,I^+)$). Множество ω - предельных точек движения $f(p,t)$ (траектории $f(p,I)$) называется его положительным предельным множеством и обозначается Ω_p.

Аналогично, если только брать $t_n \longrightarrow -\infty$, $t_n \leq 0$, $f(p,I^-)$ определяется $\alpha-$*предельная точка* движения $f(p,t)$ и его *отрицательное предельное множество* A_p. Все ω - предельные и α - предельные точки динамической системы называются ее *предельными точками.*

Определение 3. Точка $p \in X$ и движение $f(p,t)$ называются *устойчивыми по Пуассону* при $t \longrightarrow \infty$ (положительно устойчивыми по Пуассону, устойчивыми P^+), если $p \in \Omega_p$, т.е если p - ω - предельная точка движения $f(p,t)$. Это эквивалентно тому, что движение $f(p,t)$ бесконечное число раз при сколь угодно больших t пересекает произвольную окрестность v точки p.

Аналогично, если $p \in A_p$, вводится понятие отрицательно устойчивости по Пуассону - устойчивости P^-.

Определение 4. Точка $p \in X$ и движение $f(p,t)$ называются устойчивыми по Пуассону (устойчивыми P), если они устойчивы P^+ и одновременно устойчивы P^-.

Свойства устойчивости по Пуассону.

1) Множество устойчивых P^+ (P^-, P) точек динамической системы инвариантно. Поэтому можно говорить не только от устойчивых по Пуассону точках и движениях, но и об устойчивых $P^+(P^-, P)$ траекториях.

2) Если точка $p \in X$ устойчива $P^+(P)$, то соответствуящая траектория $f(p,I) \in \Omega_p$ $(f(p,I) \in A_p)$.

3) Точка $p \in X$ устойчива P^+ тогда и только тогда, когда выполнено любое из равенств: $\Omega_p = \overline{f(p,I^+)}$ или $\Omega_p = \overline{f(p,I)}$ и устойчива P^- тогда и только тогда, когда выполнено любое из равенств: $A_p = \overline{f(p,I^-)}$ или $A_p = \overline{f(p,I)}$.

4) Если движение $f(p,t)$ устойчиво P^+, то $A_p \subset \Omega_p = \overline{f(p,I)}$, если устойчиво P^-, то $\Omega_p \subset A_p = \overline{f(p,I)}$, если же оно устойчиво P, то $A_p = \Omega_p = \overline{f(p,I)}$.

Теория – 8. В чем необходимость непланарного обобщения модели К. Левина?

Моделируем личность, опираясь на шестисферное раскрытие образа жизни. Если есть шестивершинный граф, то все сферы связаны между собой. Если граф пятивершинный, то получается теорема Понтрягина-Куратовского – это нельзя исполнить на плоскости (6 вершин - тем более)

Соответсвенно есть необходимость обеспечить работу модели Левина для непланарного изображения.

Шесть сфер: труд
культура
быт
социальное окружение
социально-политическая активность
образование

Переходы между сферами могут быть в любой момент

может быть задана мера, с помощью которой можно посчитать вероятно

В меру входит 1) бюджет времени
2) стоимостная оценка.

Переключение занимает какое-то время. И оно может быть измерено хотя бы бюджетом времени.

Вопрос: 9. Как и почему связаны в перколяционно-клеточном автомате степень перестановок, простые числа и число ручек, задающих топологию граничных условий?

Результаты вычислительных экспериментов с моделями

Одним из важных итогов этих экспериментов явилось установление эмпирического факта зависимости времени релаксации ПКА (выхода на «плато» динамического равновесия) от топологического рода граничных условий рабочего поля автомата (см. Рис.3).

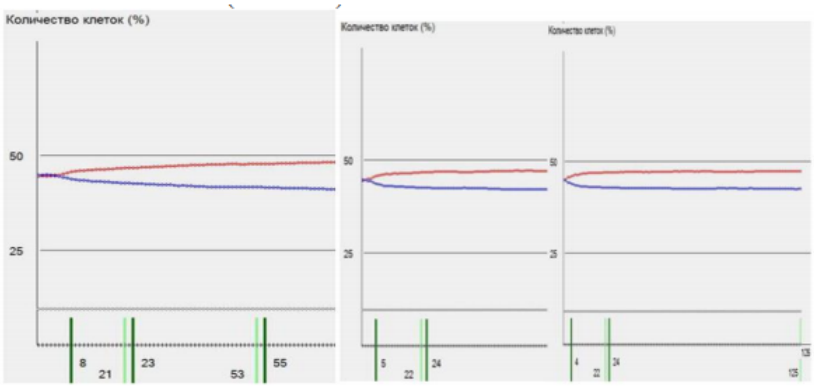


Рис.3. Зависимость времени выхода на «плато» от рода поверхности (числа «ручек»)γ - с общего старта до состояния равновесия:левый рисунок – 3 ручки; средний - 5 ручек; правый рисунок – 7 ручек.

Время выхода на «плато» - τ, отображаемое на графиках в виде числа итераций, которые помечены соответственно числами 8, 5 и 4, соотносятся соответственно с числами рода поверхности $\gamma = 3, 5, 7$. Топологический род поверхности γ визуализуется в виде разбиения границы на отрезки и их связывания так, как это показано на Рис.4. Социологически это интерпретируется в виде степени связности социума.

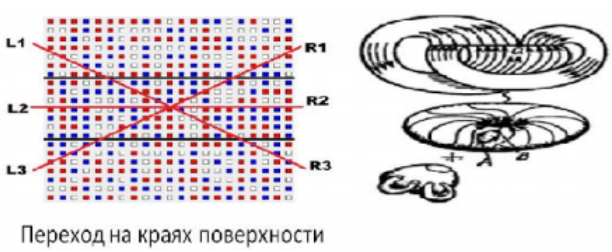


Рис.4. Перекладывание 3-х подинтервалов – преобразование пучка параллельных отрезков – как формирование всюду плотных траекторий на компактной 2-мерной поверхности рода 3 (тор, приклеенный к кренделю, - см. рисунок справа).

По существу в основе этого перекладывания лежит перестановка степени 3, которая совпадает с родом поверхности $\gamma = 3$, т.е., к примеру, 1-2-3 переходит в 3-2-1. В итоге возникает эффект перемешивания влияний цветных клеток ПКА друг на друга, при этом чем больше связность, т.е. «ручек», тем быстрее происходит перемешивание, и таким образом, быстрее осуществляется процесс усреднения. Для того, чтобы рабочее поле имело одну эргодическую компоненту, необходимую для расчёта средних величин, требуется чтобы степенями перестановок были простые числа, например, как в нашей серии вычислительных экспериментов – 3, 5 и 7. Для двумерных клеточных автоматов, в том числе таких как вышеописанный ПКА, доказано, что ПКА как двумерная динамическая система на ориентированной, замкнутой, компактной римановой поверхности имеет конечную энтропию. Это важно иметь в виду для построения оценок точности прогноза на основе последовательности конечного множества динамических графиков, часть из которых моделируется графиком переходного процесса ПКА. Т.е. в случае анализа точности построения динамических графиков ПКА ни математических ожиданий, равных бесконечности, ни отсутствия в силу этого дисперсий как для Коши-подобных распределений не ожидается.

1. Под *символической динамикой* понимают обычно тот специальный раздел общей теории динамических систем, в котором изучаются каскады и потоки, порожденные гомеоморфизмом сдвига σ в различных пространствах Σ последовательностей

$$\tilde{\omega} = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}, \tag{1.1}$$

где ω_n — буквы некоторого алфавита $\mathscr{L}$; $\sigma\{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$. Когда же говорят о *методах символической динамики*, то имеют в виду изучение произвольных динамических систем при помощи символических моделей, в которых последовательности (1.1) соответствуют траекториям изучаемой системы, а отображение σ — некоторому сдвигу вдоль этих траекторий. В частности, методы символической динамики оказываются применимыми в качественной теории дифференциальных уравнений, где рассматриваются гладкие системы на гладких многообразиях, хотя сама по себе символическая динамика большей частью имеет дело со вполне несвязными нульмерными пространствами, гомеоморфными канторову множеству.

Наиболее эффективными методы символической динамики оказываются в тех ситуациях, где изучаемые детерминированные системы обнаруживают аналогию со случайными процессами. К настоящему времени накопился ряд примеров и даже целые классы динамических систем, в том числе и с конкретным физическим содержанием, которым присущи черты «квазислучайного» поведения и для описания которых удобно пользоваться топологическими аналогами некоторых понятий вероятностного происхождения. Подчеркнем, что речь

вий или случайного внешнего шума). Мы по-прежнему остаемся в рамках математического детерминизма, т. е. единственности решения задачи Коши. Каким же образом в строго детерминированной системе может возникнуть аналогия со случайным процессом и, в частности, с марковской цепью?

Начнем со следующего простого рассуждения. Пусть на фазовом пространстве X действует динамическая система с дискретным временем (каскад) $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, порожденная отображением $f\colon X \to X$. Эта система строго детерминирована: задав точно начальное состояние x_0, мы однозначно определяем траекторию $x_n = f^n x_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Предположим теперь, что мы наблюдаем за системой, регистрируя показания некоего прибора, который, обладая ограниченной точностью, может показывать только конечный набор значений $1, \ldots, m$; другими словами, $X = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ и при $x \in E_i$ прибор показывает значение i. Множества E_i могут, вообще говоря, пересекаться («стрелка прибора стоит между делениями»), но эту возможность мы пока не будем принимать во внимание.

Пусть ω_0 — начальное показание прибора, т. е. $x_0 \in E_{\omega_0}$. Через время t образ $f^t E_{\omega_0}$ множества E_{ω_0} может оказаться весьма вытянутым и может пересекаться более чем с одним из множеств E_i. Поэтому результат наблюдения в момент t значением ω_0 определен неоднозначно. Произошла кажущаяся потеря детерминизма, вызванная не вмешательством Случая, а нашим предположением о невозможности точного определения положения фазовой точки.

Регистрируя показания прибора для всех моментов времени, мы получаем отображение $\psi\colon X \to \Sigma$, сопоставляющее точке x последовательность (1.1) так, что

$$\psi(x) = \bar{\omega} = \{\omega_n\} \Leftrightarrow f^n x \in E_{\omega_n} \Leftrightarrow x \in \bigcap_n f^{-n} E_{\omega_n}. \qquad (1.2)$$

Это соотношение является ключом к исследованию каскадов методами символической динамики.

Конечно, рассчитывать на то, что ψ будет гомеоморфизмом (в этом случае f и сдвиг σ были бы топологически сопряжены), вообще говоря, не приходится, хотя бы потому, что пространство последовательностей вполне несвязно, а в наиболее интересных случаях X — гладкое многообразие. Все же при удачном выборе «прибора», т. е. множеств E_i, соответствие (1.2) может дать важную информацию о свойствах каскада $\{f^n\}$. В частности, основные результаты данного сборника связаны с тем, что для некоторого класса динамических систем удается выбрать множества $E_1, \ldots, E_m$ так, чтобы они образовали «марковское разбиение». В этом случае рассматриваемая динамическая система обладает свойствами, присущими вероятностным марковским цепям и их топологическим аналогам.

11. Рассказать об устройстве рабочего поля перколяционно-клеточного автомата и прокомментировать пример его прикладнго применения.

Рассказать об устройстве рабочего поля перколяционно-клеточного автомата и прокомментировать пример его прикладного применения.

Пусть задано конечное мн-во X_0 – состояний одной клетки. Для простоты считаем, что

$$X_0 = \begin{cases} -(p-1), \dots, -1, & \text{если она имеет синий цвет (с)} \\ 0, & \text{если она имеет белый цвет (б)} \\ 1, \dots, (p-1), & \text{если она имеет красный цвет (к)} \end{cases}$$

Пусть $X_{ij} = X_0$ для каждой клетки с координатами (i,j) двумерной целочисленной решетки $Z = Z^2$, предварительно разместив цвета клеток равномерно случайно по рабочему полю согласно условию: $N(s)_к + N(s)_с + N(s)_б = N_0$ - const, где $N(s)_{к,с,б}$ – число клеток данного цвета в момент времени s, при этом $N(s)_б, N_0$ – const.

Каждая клетка с координатами (i,j) опрашивает своих соседей по окрестности Мура с $r=1$ об их цвете:

– если цвета совпадают, то состояния этих клеток не меняются;

– если цвета разные, то:

• в случае белого цвета, помимо его сохранения через эту клетку строится вектор длины $r=2$, и в клетке на конце этого вектора цвет не меняется;

• в случае иного цвета, состояние клетки меняется на 1 в пользу цвета клетки – источника, помимо такого акта, через эту клетку строится вектор длины $r=2$, и в клетке на конце этого вектора цвет также изменится, если она не белая, и не одного цвета с клеткой источником.

Применение клеточных автоматов для математического моделирования динамических процессов

Пожалуй наиболее частое и развитое направление применения клеточных автоматов — это математическое моделирование динамических процессов. При математическом моделировании физических явлений часто возникает ситуация, когда рассматриваемую задачу нельзя решить аналитически, а расчет ее а виде разностной схемы приводит к появлению различного рода неустойчивостей. Ряд проблем возникает при решении задач в областях сложной формы.

В процессе описания физического явления при помощи совокупности дифференциальных уравнений происходит замена физической реальности, часто носящей дискретный характер (молекулы в газодинамике, элементарные заряды в электричества и т. д.), непрерывной моделью. При переходе к разностным схемам пространство и время в этой непрерывной модели делаются вновь дискретными, а после реализации их на компьютере все величины рассматриваются с ограниченной точностью.

Отсюда напрашивается вывод о том, что целесообразно сразу строить дискретные модели физических явлений. Одним из классов таких моделей являются клеточные автоматы.

Разумеется, этот подход не является панацеей и имеет наряду с достоинствами ряд серьезных недостатков. Поэтому тем более важно выяснить, какова «экологическая ниша» таких моделей, в частности, в газовой динамике.

Клеточный автомат представляет собой математическую модель физического процесса, в которой время и пространство дискретны (совокупность значений, принимаемых пространственными координатами называется полем клеточного автомата), а все зависимые величины могут принимать конечный набор значений. Клеточный автомат обладает свойством локальности, т. е. на каждом временном шаге новое состояние некоторой точки зависит лишь от состояния точек в небольшой её окрестности. Кроме того, эта зависимость однородна в пространстве в каждой точке применяются одни и те же правила.

В настоящее время клеточные автоматы используются, как вычислительный инструмент для большого круга различных задач. Они могут упрощать расчеты в тех случаях, когда традиционные подходы приводят к сложным и требующим большого времени вычислениям.

Вероятно, это послужило основанием для того, чтобы применить решеточные газы - один из классов клеточных автоматов - для решения задач газодинамики.

Одной из первых удачных попыток такого рода был "HPP-газ" (названный по первым буквам фамилий своих создателей). Поле этого клеточного автомата представляет собой ортогональную решетку (2-х или 3-х мерную).

Возможные состояния клетки соответствуют наличию в ней частиц, движущихся параллельно осям координат (не более одной частицы на каждое направление). На каждом временном шаге частица перемещается на одну клетку. Столкновения частиц считаются абсолютно упругими. Несмотря на имеющуюся ярко выраженную анизотропию модели (скорости частиц строго параллельны осям координат), макроскопическая картина поведения автомата является изотропной.

Тем не менее, двумерный вариант этого, автомата имеет один недостаток, который в некоторых случаях является существенным: его макродинамическое поведение не удовлетворяет уравнению Навье-Стокса. Этого недостатка лишен автомат «ТИР-газ», поле которого - гексагональная решетка, образованная равносторонними треугольниками. Более высокий порядок симметрии обеспечивает выполнение уравнения Навье-Стокса для этого клеточного автомата. С другой стороны, особая структура поля несколько усложняет его реализацию на компьютере и замедляют вычисления.
Газ, описываемый данным клеточным автоматом, естественно, является идеальным, т. е. взаимодействие между частицами сводится к упругим столкновениям. Последнее исключает возможность моделирования газодинамических процессов, в которых вещество существует в различных фазах, в частности, процессов, происходящих на границе раздела сред. Между тем, при решении подобных задач с помощью разностных методов возникают трудности, подчас непреодолимые, и использование в этом случае клеточных автоматов могло бы быть вполне уместным.

Одним из существенных недостатков всех этих моделей является их принципиальная изотермичность.
Решеточные газы не являются единственным классом клеточных автоматов при помощи которых можно моделировать процессы в газах.

Влияние на развитие наук

Хотя игра состоит всего из двух простых правил, тем не менее она более сорока лет привлекает пристальное внимание учёных. Игра «Жизнь» и ее модификации повлияла (в ряде случаев взаимно) на многие разделы таких точных наук как математика, информатика, физика. Это, в частности:

- Теория автоматов,
- Теория алгоритмов,
- Теория игр и математическое программирование,
- Алгебра и теория чисел,
- Теория вероятностей и математическая статистика,
- Комбинаторика и теория графов,
- Фрактальная геометрия,
- Вычислительная математика,
- Теория принятия решений,
- Математическое моделирование.

Кроме того, многие закономерности, обнаруженные в игре, имеют свои аналогии в других, подчас совершенно «нематематических» дисциплинах.

Вот список наук, теории которых имеют интересные точки соприкосновения с феноменами «Жизни»:

- Кибернетика. Сама игра является удачной попыткой Конвея доказать существование простых самовоспроизводящихся систем.
- Биология. Внешнее сходство с развитием популяций примитивных организмов впечатляет.
- Физиология. Рождение и смерть клеток аналогичны процессу возникновения и исчезновения нейронных импульсов, которые и формируют процесс мышления. А также аналогичны созданию импульсов в нервной системе многоклеточных организмов.
- Астрономия. Эволюции некоторых сложных колоний удивительным образом схематично повторяют этапы развития спиралевидных галактик.
- Физика твёрдого тела. Теория автоматов вообще и игра «Жизнь» в частности используются для анализа «явлений переноса» — диффузии, вязкости и теплопроводности.
- Квантовая физика. Поведение «жизненных» ячеек (рождение новых и взаимное уничтожение) во многом напоминают процессы, происходящие при столкновении элементарных частиц.
- Наномеханика. Стационарные и пульсирующие колонии являются показательным примером простейших устройств, созданных на основе нанотехнологий.
- Электротехника. Правила игры используются для моделирования самовосстанавливающихся электрических цепей.
- Химия. Конфигурации, подобные строящимся в игре, возникают во время химических реакций на поверхности, в частности в опытах М. С. Шакаевой возникают движущиеся молекулярные конструкции аналогичные «жизненному» планеру. Также предпринимаются попытки объяснить периодические химические реакции с помощью многомерных клеточных автоматов. Самоорганизацией элементарных частиц также занимается супрамолекулярная химия.
- Социология. Процессы доминации, вытеснения, поглощения, сосуществования, слияния и уничтожения популяций во многих аспектах схожи с явлениями, происходящими при взаимодействии больших, средних и малых социальных групп.
- Философия. Приведённый список примеров снова наводит на мысль, что всё во Вселенной развивается по одним и тем же нескольким фундаментальным законам, пока ещё не познанным человеком.

Возможно, эта игра связана и с другими научными явлениями, в том числе и с теми, о которых современной науке пока неизвестно. Также возможно, что не открытые на сегодня законы Природы и Общества станут более понятными благодаря «Жизни» и ее модификациям.

Источник
https://neuronus.com/theory/ca/654-kletochnye-avtomaty-chast-iii-primenenie-kletochnykh-avtomatov.html

Фазовое пространство — пространство, каждая точка которого соответствует одному и только одному состоянию из множества всех возможных состояний систем (состояние — точка фазового пространства).

Динамическая система — множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и положение в фазовом пространстве каждого элемента системы.
Более строго: динамической системой, заданной на гладком многообразии X, называется отображение $g : R \times X \to X$, записываемое в параметрическом виде $g^t(x)$, где $t \in R$, $x \in X$, которое является дифференцируемым отображением.

Диффеоморфизм — взаимно однозначное и гладкое отображение, обратное к которому тоже является гладким.

Грубая динамическая система:

- (из слайда Шведовского)
  На плоскости задано множество двумерных динамических систем: $Dx/dt = X(x)$, где $X(x_1, x_2) - C^r$ - гладкая ($r \geq 1$) функция, определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset R^2$.
  Динамическая система $X(x)$ называется **грубой** в области G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что все системы в δ-окрестности X топологически эквивалентны X и гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε-близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε)

- (из учебника Андронова)
  это система дифференциальных уравнений, у которой топологическое поведение траекторий не меняется при малых возмущениях правой части.

Стивен Смейл доказал в 1965 году, что при размерности фазового пространства $n \geq 3$ существуют динамические системы (диффеоморфизм трехмерного тора), в окрестности которых нет ни одного структурно устойчивого (грубого) диффеоморфизма.

Это означает, что на четырехмерном многообразии имеется векторное поле, которое нельзя сделать структурно устойчивым посредством малого шевеления.

Это разрушило надежды математической общественности на построение классификации "грубых систем"для размерности фазового пространства $n \geq 3$.